Die Senatorin
für Kinder und Bildung

Freie Hansestadt Bremen

Schriftliche Abiturprüfung 2018

Leistungskurs Mathematik (GTR)

Mittwoch, 2. Mai 2018, 9.00 Uhr

Unterlagen für Referenten und Korreferenten

- Diese Unterlagen sind nicht für Schülerinnen und Schüler bestimmt -

---

Diese Unterlagen enthalten …

- Allgemeines,
- die Bewertung der Prüfungsleistung und Lösungsskizzen zu den Aufgaben,
- keine Aufgabenstellungen – Ihre Exemplare entnehmen Sie bitte den Schüleraufgaben – ,
- einen Protokollbogen zur Auswahl der Aufgaben für die Prüfungsakten Ihrer Schule,
- einen Rückmeldebogen für die Zentralabiturkommission zur Auswahl der Aufgaben.

Allgemeines

- Prüfen Sie die Prüfungsaufgaben vor der Aushändigung an die Schülerinnen und Schüler auf ihre Vollständigkeit und formale und inhaltliche Korrektheit und ergänzen Sie sie gegebenenfalls. Bei nicht ausreichender Anzahl erstellen Sie entsprechende Kopien vor Ort. Bei einem schwerwiegenden inhaltlichen Fehler informieren Sie sofort die Senatorin für Kinder und Bildung über die **Hotline (0421…)** von 7.00 bis 9.30 Uhr. Die von der Senatorin für Kinder und Bildung vorgenommene Korrektur gibt die Schule sofort an die für die schriftliche Prüfung zuständige Lehrkraft weiter.
- Die Prüfungsaufgaben bestehen aus **zwei Teilen**.
- **Teil 1 besteht aus den „hilfsmittelfreien“ Aufgaben:**
  Die Bearbeitungszeit beträgt 45 Minuten.
  Erlaubte Hilfsmittel: Zeichengerät und Rechtschreiblexikon.
  Für die Bearbeitung dieser Aufgaben sind Taschenrechner und Formelsammlung **NICHT** erlaubt.
- **Teil 2 beinhaltet die Aufgaben mit Hilfsmitteln.**
  Die Bearbeitungszeit beträgt 225 Minuten.
  Erlaubte Hilfsmittel: Grafikfähiger Taschenrechner (GTR), dessen Betriebsfähigkeit die Schülerin / der Schüler gewährleistet, Formelsammlung, Zeichengerät, Rechtschreiblexikon.
- **Auswahl der Aufgaben:**
  Wählen Sie gemeinsam mit Ihrer Korreferentin / Ihrem Korreferenten vorab für den „hilfsmittelfreien“ Teil aus den fünf vorgelegten Aufgaben vier zur Bearbeitung aus. Diese kommen aus den Themenbereichen Analysis, Wahrscheinlichkeitsrechnung / Statistik und Lineare Algebra / Analytische Geometrie. Im Themenbereich Lineare Algebra / Analytische Geometrie werden Aufgaben vorgelegt, die ihren Schwerpunkt in einem der beiden Themen haben. Der Fachprüfungsausschuss wählt in diesem Themenbereich den Schwerpunkt Lineare Algebra oder Analytische Geometrie.

- Für den zweiten Teil der Prüfung, den Aufgaben mit Hilfsmitteln, wählen Sie gemeinsam mit Ihrer Korreferentin / Ihrem Korreferenten aus den fünf vorgelegten Aufgaben drei zur Bearbeitung aus. Die Aufgaben kommen aus mindestens zwei verschiedenen Themenbereichen, mindestens eine der Aufgaben ist aus dem Themenbereich Analysis. Es dürfen nicht beide Aufgaben aus dem Themenbereich Lineare Algebra / Analytische Geometrie gewählt werden. Kommt es zu keiner Einigung, bestimmt die/der Vorsitzende des Fachprüfungsausschusses die Auswahl der Aufgaben (§ 10 Abs. 2 Nr. 1 AP-V). Protokollieren Sie auf dem beigefügten Protokollformular, welche Aufgaben Sie gewählt haben (Prüferin/Prüfer und Korreferentin/Korreferent und ggf. auch die/der Vorsitzende des Fachprüfungsausschusses unterschreiben das Protokoll).
- Füllen Sie bitte für die Zentralabiturkommission Mathematik den beigefügten Rückmeldebogen zur Auswahl der Aufgaben aus und schicken ihn an die dort genannte Adresse.
- Fragen Sie vor Verteilung der Aufgaben nach der Arbeitsfähigkeit der Schülerinnen und Schüler und weisen Sie diese auf die Regelungen des § 5 AP-V (Täuschung und Behinderung) hin.
- Machen Sie die Schülerinnen und Schüler auf die Arbeitshinweise aufmerksam, die am Anfang ihrer Unterlagen für die Prüfung stehen. Geben Sie ihnen ggf. die nötigen Angaben zur Schulnummer sowie zur genauen Kursbezeichnung.

Die Bewertung der Prüfungsleistung

Die Lösungsskizze stellt eine Lösungsvariante dar; andere gleichwertige Lösungen sind entsprechend zu bewerten. Die Bewertungsanteile pro Teilaufgabe sind obligatorisch.

Für die Festlegung der Gesamtleistung werden den erzielten Bewertungseinheiten die entsprechenden Notenstufen gemäß folgender Tabelle zugeordnet.

Ab ... %	Punkte	Note	Ab ... %	Punkte	Note
95	15	1+	55	07	3-
90	14	1	50	06	4+
85	13	1-	45	05	4
80	12	2+	40	04	4-
75	11	2	33	03	5+
70	10	2-	27	02	5
65	09	3+	20	01	5-
60	08	3	0	00	6

Teil 1 **Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen**

	Lösungsskizze	Bewertung I	Bewertung II	Bewertung III
Aufgabe 1				
a)	Es ist $f'(x) = -3 \cdot x^2 + 18 \cdot x - 15$. Nachweis der Erfüllung der Eigenschaft (1): $f'(0) = -15$ Nachweis der Erfüllung der Eigenschaft (2): $f(5) = 0$, $f'(5) = 0$ Nachweis der Erfüllung der Eigenschaft (3): $f(-1) = t(-1)$, $f'(-1) = -36$	2	3	
Verteilung der insgesamt 5 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche		**2**	**3**	**0**

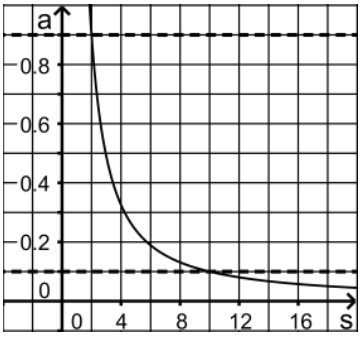
Aufgabe 2				
a)	Aus $f_k(1) = 0$ folgt, dass $k = 1$ für den Graphen A gilt. Mit $f_k'(x) = 3 \cdot x^2 - k$ folgt aus $f_k'(1) = 0$, dass $k = 3$ für den Graphen B gilt.		2	1
b)	Für zwei beliebige Werte k_1 und k_2 mit $k_1 \neq k_2$ folgt aus $f_{k_1}(x) = f_{k_2}(x)$ die Gleichung $x^3 - k_1 \cdot x = x^3 - k_2 \cdot x$, also $0 = k_1 \cdot x - k_2 \cdot x = (k_1 - k_2) \cdot x$ und damit $x = 0$. Wegen $f_k(0) = 0$ ist folglich der Koordinatenursprung der gemeinsame Punkt.			2
Verteilung der insgesamt 5 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche		**0**	**2**	**3**

Aufgabe 3				
a)	Die Wahrscheinlichkeit beträgt $\frac{10}{10^2} = \frac{1}{10}$.	1	1	
b)	Die Wahrscheinlichkeit beträgt $\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{10^3} = \frac{72}{100}$.	1	2	
Verteilung der insgesamt 5 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche		**2**	**3**	**0**

Lösungsskizze		Bewertung I	Bewertung II	Bewertung III
Aufgabe 4				
a)	Die Gerade h, die durch die Punkte A und B verläuft, ist gegeben durch h: $\vec{x} = m \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$, $m \in \mathbb{R}$. Da $\overrightarrow{0F} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{0F} = \frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} = 0$ gilt, schneiden sich die beiden Geraden senkrecht im Punkt F.	2	2	
b)	Im Dreieck ABC ist die Strecke $\overline{CF}$ die Höhe vom Eckpunkt C auf die Seite $\overline{AB}$ (oder ähnliche Formulierungen, die zeigen, dass ein rechtwinkliges Dreieck erkannt wurde).		1	
Verteilung der insgesamt 5 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche		**2**	**3**	**0**

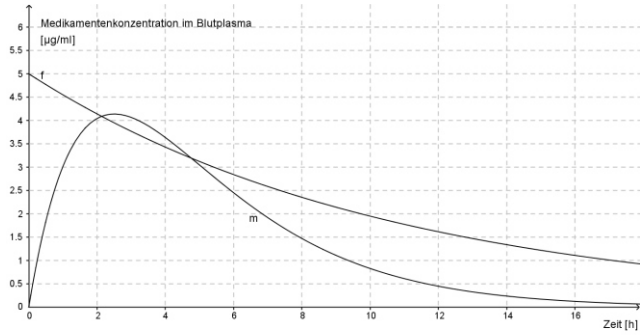
Aufgabe 5				
a)	Die richtige Abbildung ist Abbildung C. Mögliche Begründung: Mit den Werten des Übergangsgraphen folgt $\frac{1}{10} \cdot \frac{2}{5} \cdot 25 = 1$. Damit ergeben sich nach jeweils drei Zeitabschnitten stets dieselben Anzahlen von Eiern, Larven und Insekten. Nur Abbildung C zeigt eine solche Entwicklung.	1	2	
b)	Angabe einer möglichen Übergangsmatrix, z. B. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 30 \\ \frac{1}{10} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & 0 \end{pmatrix}$. Die Änderung eines anderen Matrixeintrags ist auch möglich.		2	
Verteilung der insgesamt 5 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche		**1**	**4**	**0**

Teil 2 – Aufgabe 1 **Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen**

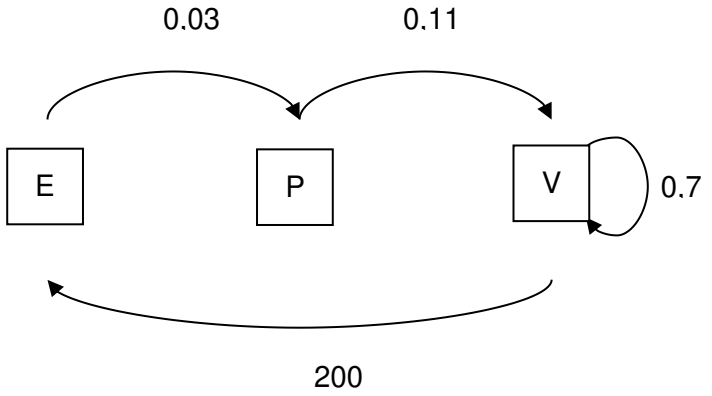
	Lösungsskizze	Bewertung I	Bewertung II	Bewertung III
a)	Mit dem Satz des Pythagoras erhält man $\sqrt{1^2+2^2} \approx 2{,}24$. Die Länge der Bahn beträgt also etwa 2,24 m. Aus der Gleichung $-a\cdot 3^2+0{,}8\cdot 3+2=3{,}5$ folgt $a=0{,}1$. Aus der Gleichung $\tan\varphi = p'_{0,1}(10) = -1{,}2$ folgt $\varphi \approx -50{,}2°$. Die Kugel trifft unter einem Winkel von ungefähr 50° auf. Der Graph von p_a ist eine nach unten geöffnete Parabel und es gilt: Aus $p'_a\left(\frac{0{,}4}{a}\right) = -2\cdot a\cdot\frac{0{,}4}{a}+0{,}8=0$ und $p''_a\left(\frac{0{,}4}{a}\right)=-2\cdot a<0$ folgt, dass $x=\frac{0{,}4}{a}$ eine Maximalstelle ist. Mit $p_a\left(\frac{0{,}4}{a}\right) = -a\cdot\left(\frac{0{,}4}{a}\right)^2+0{,}8\cdot\frac{0{,}4}{a}+2=2+\frac{0{,}16}{a}$ erhält man den y-Wert. Damit ist $\left(\frac{0{,}4}{a}\,\middle|\,2+\frac{0{,}16}{a}\right)$ Hochpunkt des Graphen von p_a. Für $a=1$ ergibt sich der Hochpunkt $H_1(0{,}4\,\vert\,2{,}16)$, für $a=2$ $H_2(0{,}2\,\vert\,2{,}08)$. Die Steigung der Gerade durch diese beiden Punkte beträgt $\frac{2{,}16-2{,}08}{0{,}4-0{,}2}=0{,}4$. (Alternativ kann die Steigung auch über die Berechnung der Ortskurve der Hochpunkte $y=0{,}4x+2$ ermittelt werden.)	7	4	3
b)	Für $s=20$ ist $a=\frac{0{,}8}{20}+\frac{2}{20^2}=0{,}045$. Damit ergibt sich: $2+\frac{0{,}16}{0{,}045}\approx 5{,}56$. Die Höhe der Flugkurve beträgt etwa 5,56 m. Die Aussage ist falsch. Zum Beispiel für $s=10$ ist $a=0{,}1$, aber für $s=12$ weicht der Wert von a mit etwa 0,08 deutlich von der Hälfte von dem erwarteten Wert von 0,05 ab.  Die Berechnung des Flächeninhaltes mit dem GTR: $2\cdot 0{,}9+\int_2^{10}\left(\frac{0{,}8}{s}+\frac{2}{s^2}\right)ds-10\cdot 0{,}1\approx 2{,}89$. Der Flächeninhalt beträgt ca. 2,89 FE.		7	7
c)	Da der Behälter rotationssymmetrisch zur x-Achse ist, erfolgt die Berechnung mit dem Rotationsvolumen, wobei das Volumen der Kugel subtrahiert wird. $\pi\cdot\int_0^{10}(q(x))^2\,dx-\frac{4}{3}r^3\pi\approx 1518$. Im Behälter befinden sich also mehr als $1500\,cm^3$ Wasser.		5	
Verteilung der insgesamt 33 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche		**7**	**16**	**10**

Teil 2 – Aufgabe 2 **Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen**

	Lösungsskizze	Bewertung I	Bewertung II	Bewertung III
a)	$f(0)=5 \Rightarrow a=5$ prozentuale Abnahme von 9% pro Stunde $\Rightarrow f(t)=5\cdot 0{,}91^t \Rightarrow f(t)=5\cdot e^{\ln 0{,}91\cdot t} \approx 5\cdot e^{-0.0943\cdot t}$ $f(2)\approx 4{,}14$, also beträgt die Medikamentenkonzentration im Blutplasma nach zwei Stunden ca. 4,14µg/ml. $0{,}5=e^{-0{,}0943t_H} \Rightarrow t_H \approx 7{,}35$ Die Plasmahalbwertszeit beträgt 7,35h. Mit $c=-0{,}0943$ ist die Bedingung $\frac{f'(t)}{f(t)}=c$ erfüllt, denn $\frac{f'(t)}{f(t)}=\frac{-0{,}0943\cdot 5e^{-0{,}0943t}}{5e^{-0{,}0943t}}=-0{,}0943$ Erläuterung: Die Veränderung der Medikamentenkonzentration im Blutplasma ist proportional zur Medikamentenkonzentration im Blutplasma.	3	4	2
b)	$g(0)=0$ Bild B, denn $g(0)=0$ und $\lim\limits_{t\to\infty} g(t)=8$ (Bild A: $g(0)=2$; Bild C: $\lim\limits_{t\to\infty} g(t)=7$) oder andere treffende Begründungen $g'(t)=6{,}4\cdot e^{-0{,}8t}$, also $\lim\limits_{t\to\infty} g'(t)=0$, da $e^{-0{,}8t}\to 0$ für $t\to\infty$ Die Veränderung der Medikamentenkonzentration nähert sich auf lange Sicht Null, d.h. die Medikamentenkonzentration bleibt nahezu gleich. Das Medikament wird nicht nur zugeführt, sondern im Körper auch abgebaut. Die Abbaumenge nähert sich der Zufuhrmenge an.	1	5	2
c)	$m'_{a,k}(t)=a\cdot e^{-kt}(1-kt)$ $m''_{a,k}(t)=a\cdot e^{-kt}(-2k+k^2t)$ Aus $m'(t)=0$ folgt $t_E=\frac{1}{k}$. Es gilt $m''(\frac{1}{k})=a\cdot e^{-1}(-2k+k)=a\cdot e^{-1}\cdot(-k)<0$ (der erste Faktor ist positiv, der zweite negativ) und damit liegt bei $t_E=\frac{1}{k}$ ein Hochpunkt. Mit $H(2{,}5/4{,}14)$ folgt aus $t_E=\frac{1}{k}$, dass $k=0{,}4$; aus $\frac{a}{k}\cdot e^{-1}=4{,}14$ folgt $a\approx 4{,}5$.			

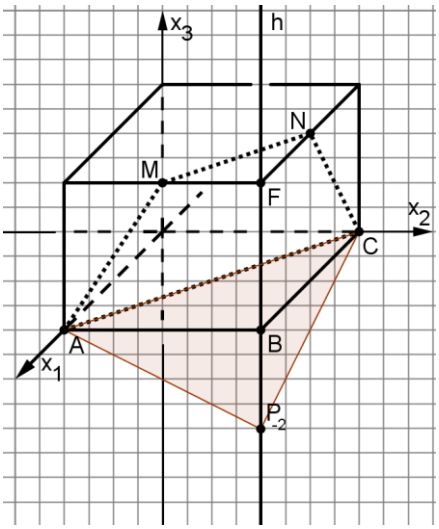
	Lösungsskizze	Bewertung I	Bewertung II	Bewertung III
		2	8	2
d)	$\lim\limits_{x\to\infty}\int_0^x f(t)dt = \lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{5}{-0{,}0943}e^{-0{,}0943\cdot t}\right]_0^x$ $= \lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{-0{,}0943}e^{-0{,}0943\cdot t} - \frac{5}{-0{,}0943}$ $= 0 + \frac{5}{0{,}0943}$ ≈ 53 Bioverfügbarkeit bei oraler Einnahme: $\frac{28{,}125}{53} \approx 0{,}53 = 53\%$	1		3
Verteilung der insgesamt 33 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche		**7**	**17**	**9**

Teil 2 – Aufgabe 3 **Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen**

	Lösungsskizze	Bewertung I	Bewertung II	Bewertung III
a)	Übergangsdiagramm:  Ein Vollinsekt legt wöchentlich 200 Eier, aus denen weibliche Larven schlüpfen können. 11 % der Puppen entwickeln sich zu Vollinsekten. Es gilt $\overrightarrow{v_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 230 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v_6} = L^6 * \overrightarrow{v_0} \approx \begin{pmatrix} E_6 \\ P_6 \\ 336 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{v_{10}} = L^{10} * \overrightarrow{v_0} \approx \begin{pmatrix} E_{10} \\ P_{10} \\ 652 \end{pmatrix}$. Es gilt: $\overrightarrow{v_{-2}} = \left(L^2\right)^{-1} \cdot \overrightarrow{v_0} \approx \begin{pmatrix} 69697 \\ P_{-2} \\ V_{-2} \end{pmatrix}$. Alternativ ist eine Lösung mit Hilfe von linearen Gleichungssystemen möglich. Es gilt: $\overrightarrow{v_{14}} = L^{14} * \overrightarrow{v_0} \approx \begin{pmatrix} E_{14} \\ P_{14} \\ 1241 \end{pmatrix}$ bzw. $\overrightarrow{v_{14}} = \left(L^2\right)^2 * \overrightarrow{v_{10}} \approx \begin{pmatrix} E_{14} \\ P_{14} \\ 1241 \end{pmatrix}$ und damit $\frac{652}{336} \approx 1{,}94$ sowie $\frac{1241}{652} \approx 1{,}90$. Beide Werte entsprechen jeweils näherungsweise einer Zunahme von etwa 92 %. $k = \sqrt[4]{1{,}92} \approx 1{,}18$, d.h. die Anzahl nimmt wöchentlich um etwa 18 % zu. Wegen $10 \cdot 230 = 336 \cdot 1{,}18^t \Leftrightarrow t \approx 11{,}6$ verzehnfacht sich die Anzahl der Vollinsekten etwa 17,5 Wochen nach Beobachtungsbeginn.	6	9	2

b)	Mit $\overrightarrow{v_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4000 \\ 0 \end{pmatrix}$ gilt $\overrightarrow{v_1} = L * \overrightarrow{v_0} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 430 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{v_2} = L * \overrightarrow{v_1} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 86000 \\ 0 \\ 291 \end{pmatrix}$. Die Aussage ist falsch: Werden der Population erst nach Ablauf des Zeitraums Vollinsekten entnommen, so kann sie sich vorher ungestört gemäß der Matrix L entwickeln. Bei einer wöchentlichen Entnahme dagegen können die entnommenen Tiere nicht mehr zur Vermehrung beitragen, sodass die Population am Ende des gesamten Zeitraums weniger Eier, Puppen und Vollinsekten enthalten wird. $L * \begin{pmatrix} 20000 \\ 600 \\ V \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20000 \\ 600 \\ V \end{pmatrix} \Leftrightarrow V = 100 \wedge a = 36$	2	3	3
c)	$M * \begin{pmatrix} b \cdot V \\ 4 \cdot V \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \cdot V \\ 0{,}09 \cdot b \cdot V \\ 1{,}5 \cdot V \end{pmatrix} = 1{,}5 \cdot \begin{pmatrix} \frac{200}{3} \cdot V \\ \frac{3}{50} \cdot b \cdot V \\ V \end{pmatrix} = c \cdot \begin{pmatrix} b \cdot V \\ 4 \cdot V \\ V \end{pmatrix} \Leftrightarrow b = \frac{200}{3} \wedge c = 1{,}5$ Die Aussage ist richtig: Die Entwicklung der Population von einer Woche n zur nächsten kann mithilfe der Matrix $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 100 \\ 0{,}09 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}15 & 0 \end{pmatrix}$ beschrieben werden. Es genügt zu zeigen, dass N^3 eine Diagonalmatrix ist. Es gilt $N^3 = \begin{pmatrix} 1{,}35 & 0 & 0 \\ 0 & 1{,}35 & 0 \\ 0 & 0 & 1{,}35 \end{pmatrix}$. Damit wachsen die Koordinaten von $\overrightarrow{v_n}$ alle drei Wochen jeweils um den Faktor der entsprechenden Diagonalmatrixeinträge. Konkret gilt: $N^{3t} * \overrightarrow{v_n} = 1{,}35^t \cdot \overrightarrow{v_n}$.		4	4
Verteilung der insgesamt 33 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche		**8**	**16**	**9**

Teil 2 – Aufgabe 4 **Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen**

	Lösungsskizze	Bewertung I	Bewertung II	Bewertung III
a)	Den Koordinaten der gegebenen Punkte ist zu entnehmen, dass das Viereck OABC ein Quadrat ist. Damit ist das Dreieck ABC rechtwinklig und gleichschenklig. Alternativ kann man dies durch Längenberechnung und Nachweis eines rechten Winkels zeigen. Der Flächeninhalt beträgt 8 FE. $g_{AC}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ u \in \mathbb{R}$ Die Gerade h schneidet die x_1x_2-Ebene im Punkt B. Die Gerade durch A und C liegt in der x_1x_2-Ebene und verläuft nicht durch B.	6		
b)	 $\cos(60°) = \frac{\left\lvert \begin{pmatrix} t \\ t \\ -4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rvert}{\sqrt{t^2 + t^2 + 16}} \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} = \frac{4}{\sqrt{2t^2 + 16}} \Leftrightarrow 2t^2 + 16 = 64$ $\Leftrightarrow \quad t = -\sqrt{24} \vee t = \sqrt{24}$	2	4	
c)	Für $t = 0$ liegen die Punkte A, B und C in der Ebene, dann ist die Schnittfläche ein Quadrat. Zwei der Eckpunkte sind stets die Punkte A und C. Für $0 < t \leq 3$ liegt der dritte Eckpunkt auf der Seitenkante $\overline{BF}$ des Quaders, für $-3 \leq t < 0$ auf der gegenüberliegenden Seitenkante, dann ist die Schnittfläche ein Dreieck. Also gilt: $t \in [-3;3] \setminus \{0\}$.			6

d)	$j: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + m \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$; $k: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + n \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$; $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ Das Gleichsetzen von j und k gibt das Gleichungssystem I $-2n = -4$ II $2m = 4$ mit der Lösung $m = 2$ und $n = 2$. III $3m - 3n = 0$ Durch das Einsetzen von m in j erhält man den Schnittpunkt $S(4 \mid 4 \mid 6)$. Nachweis, dass S auf h liegt mit: $h: \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$. Das gilt für $r = 2$. Volumen der Pyramide $ABCP_6$: $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 = 16$ Volumen der Pyramide, die den betrachteten Teilkörper zur Pyramide $ABCP_6$ ergänzt: $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2$ Volumen des betrachteten Teilkörpers: $16 - 2 = 14$.	2	10	
e)	Bestimmen Sie diejenigen Werte von t, für die B und E_t den Abstand 2 haben.			3
Verteilung der insgesamt 33 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche		**10**	**14**	**9**

Teil 2 – Aufgabe 5 **Erwartungshorizont und Bewertung nach Anforderungsbereichen**

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>X: Anzahl der fehlerhaften Bildschirme, p=0,20.
n=25:
$P(A)=P(X=3)=\text{binompdf}(25;\,0{,}2;\,3)\approx 13{,}6\,\%$.
n=50:
$P(B)=P(X\le 8)=\text{binomcdf}(50;\,0{,}2;\,8)\approx 30{,}7\,\%$.
n=200:
$P(C)=P(30<X<50)$
$=\text{binomcdf}(200;\,0{,}2;\,49)-\text{binomcdf}(200;\,0{,}2;\,30)\approx 90{,}8\,\%$.
n=250:
$E(X)=250\cdot 0{,}2=50$.
Da E(X) ganzzahlig, ist X=50 der Wert mit der größten Wahrscheinlichkeit.
Die Aussage ist richtig. Mögliche Begründung: für jede Anzahl n der zu kontrollierenden Bildschirme gilt: $P(X=0)=0{,}8^n$ sowie $0{,}8^{n+1}<0{,}8^n$.</td><td>7</td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>D: „Das Display ist defekt.“
N: „Das Netzteil ist defekt.“
<table>
<tr><td></td><td>D</td><td>$\overline{D}$</td><td></td></tr>
<tr><td>N</td><td>1,0 %</td><td>2,0 %</td><td>3,0 %</td></tr>
<tr><td>$\overline{N}$</td><td>9,7 %</td><td>87,3 %</td><td>97,0 %</td></tr>
<tr><td></td><td>10,7 %</td><td>89,3 %</td><td>100 %</td></tr>
</table>
$P(N|D)=\frac{0{,}01}{0{,}107}\approx 9{,}3\,\%$.
$P(D)\cdot P(N)=0{,}107\cdot 0{,}03=0{,}00321\ne 0{,}01=P(D\cap N)$
Die beiden Defekte treten also nicht unabhängig voneinander auf.</td><td>1</td><td>8</td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>Die Anzahl fehlerhafter Bildschirme unter den zehn zufällig ausgewählten Geräten ist nicht binomialverteilt.
Mögliche Begründung: Wäre die Anzahl fehlerhafter Bildschirme unter den ausgewählten binomialverteilt, so wäre es beispielsweise möglich, dass sieben Bildschirme fehlerhaft sind. Dies steht jedoch im Widerspruch zum Sachzusammenhang.</td><td></td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>d)</td><td>Folgende Fehlentscheidungen können bei der Qualitätskontrolle auftreten:
Obwohl weiterhin höchstens 20 % der Geräte fehlerhaft sind, entscheidet man sich aufgrund einer zufällig hohen Anzahl defekter Geräte dafür, das Herstellungsverfahren nicht zu verändern und auf die Einsparungen zu verzichten. (Fehler erster Art)
Obwohl nun mehr als 20 % der Geräte fehlerhaft sind, entscheidet man sich aufgrund einer zufällig niedrigen Anzahl defekter Geräte dafür, das Herstellungsverfahren zu verändern, um Einsparungen zu erzielen. (Fehler zweiter Art)
Y: Anzahl fehlerhafter Geräte. Es sei k die Anzahl fehlerhafter Geräte, ab der man sich dafür entscheidet, das Herstellungsverfahren nicht zu verändern und auf die Einsparungen zu verzichten.
Mit n=200 und p=0,2 sowie $\alpha\le 10\%$ folgt $P(Y<k)\ge 90\%\Rightarrow k=48$.
Die Entscheidungsregel lautet demnach:
Sobald mindestens 48 fehlerhafte Geräte gezählt werden, entscheidet man sich dafür, das Herstellungsverfahren nicht zu verändern und auf die Einsparungen zu verzichten.</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Lösungsskizze	Bewertung I	Bewertung II	Bewertung III
Y: Anzahl fehlerhafter Geräte. Es sei k die Anzahl fehlerhafter Geräte, ab der man sich dafür entscheidet, das Herstellungsverfahren nicht zu verändern und auf die Einsparungen zu verzichten. Mit n=200 und p=0,26 sowie $\beta \approx 60\%$ folgt $P(Y < k) \geq 60\% \Rightarrow k = 54$. Die zugrunde liegende Entscheidungsregel lautet demnach: Sobald mindestens 54 fehlerhafte Geräte gezählt werden, entscheidet man sich dafür, das Herstellungsverfahren nicht zu verändern und auf die Einsparungen zu verzichten. Mit n=200 und p=0,2 gilt dann für den Fehler 1 Art: $\alpha = P(Y \geq 54) \approx 100\% - 99\% = 1\%$. X: Anzahl fehlerfreier Bildschirme, p=0,80. Es soll gelten: $P(X \geq 49) \geq 95\%$. Das unbekannte n muss so gewählt werden, dass 49 am linken Rand der 1,64-σ Umgebung von $\mu = n \cdot p$ liegt: $\mu - 1{,}64 \cdot \sigma = 49$. Das liefert folgende Gleichung: $0{,}8 \cdot n - 1{,}64 \cdot \sqrt{0{,}8 \cdot 0{,}2 \cdot n} = 49 \quad \Leftrightarrow \quad n - 0{,}82 \cdot \sqrt{n} = 61{,}25$ Mit der 2. Binomischen Formel ergibt sich dann: $\left(\sqrt{n} - 0{,}41\right)^2 = 61{,}25 + 0{,}41^2 \Leftrightarrow \sqrt{n} = 0{,}41 \pm \sqrt{61{,}25 + 0{,}41^2}$ $\Rightarrow \sqrt{n} \approx 8{,}25$ $\Rightarrow n \approx 68$ Es müssen also insgesamt 68 Geräte angeliefert werden, um sicher zu gehen, dass die Lieferung mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% mindestens 49 fehlerfreie Geräte enthält.		4	9
Verteilung der insgesamt 33 Bewertungseinheiten auf die Anforderungsbereiche	**8**	**16**	**9**

Schulnr.: Kursbezeichnung:

Name:

Schriftliche Abiturprüfung 2018

Leistungskurs Mathematik

Mittwoch, 2. Mai 2018, 9.00 Uhr

Unterlagen für die Prüfungsteilnehmerinnen und –teilnehmer

– Teil 1: „hilfsmittelfreie“ Aufgaben –

Allgemeine Arbeitshinweise

- Tragen Sie bitte oben rechts auf diesem Blatt und auf den nachfolgenden Aufgabenblättern die Schulnummer, die schulinterne Kursbezeichnung und Ihren Namen ein.
- Schreiben Sie auf alle Entwurfsblätter (Kladde) und die Reinschrift Ihren Namen.
- Versehen Sie Ihre Reinschrift mit Seitenzahlen.

Fachspezifische Arbeitshinweise

- Die Arbeitszeit für diesen Teil beträgt 45 Minuten.
- **Erlaubte Hilfsmittel: Zeichengerät, Rechtschreiblexikon.**

Aufgaben

- Sie erhalten vier Aufgaben zur Bearbeitung.
- Überprüfen Sie bitte zu Beginn die Vollständigkeit der vorgelegten Aufgaben (Anzahl der Blätter, Anlagen, …).
- Vermerken Sie in Ihrer Reinschrift, welche Aufgabe Sie jeweils bearbeiten.

Teil 1 – Aufgabe 1 - zum Themenbereich Analysis

Gegeben ist die in IR definierte Funktion f mit $f(x) = -x^3 + 9 \cdot x^2 - 15 \cdot x - 25$.

Weisen Sie nach, dass f folgende Eigenschaften besitzt:

(1) Der Graph von f besitzt an der Stelle $x = 0$ die Steigung -15.

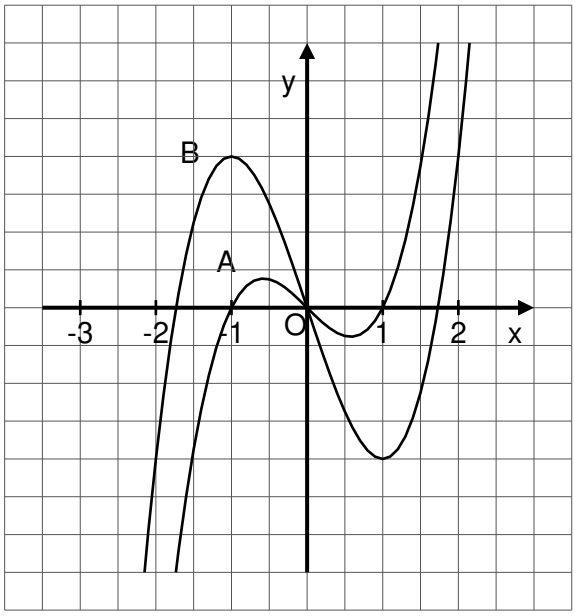
(2) Der Graph von f besitzt im Punkt $A(5|f(5))$ die x-Achse als Tangente.

(3) Die Tangente t an den Graphen der Funktion f im Punkt $B(-1|f(-1))$ kann durch die Gleichung $t(x) = -36 \cdot x - 36$ beschrieben werden.

(5 Punkte)

Teil 1 – Aufgabe 2 - zum Themenbereich Analysis

Für jeden Wert von k $(k \in \mathbb{R})$ ist eine Funktion f_k durch $f_k(x) = x^3 - k \cdot x$ $(x \in \mathbb{R})$ gegeben.
Die in der Abbildung dargestellten Graphen A und B sind Graphen von f_k für zwei verschiedene Werte von k.
Der Graph A schneidet die x-Achse an der Stelle $x = 1$.
Der Graph B hat einen Tiefpunkt mit der x-Koordinate 1.



a) Bestimmen Sie zu den Graphen A und B jeweils den zugehörigen Wert von k.

(3 Punkte)

b) Zeigen Sie, dass alle Graphen von f_k genau einen gemeinsamen Punkt haben.

(2 Punkte)

Schulnr.: Kursbezeichnung:

Name:

Teil 1 – Aufgabe 3 - zum Themenbereich Stochastik

Zwei rote und drei gelbe Kugeln werden auf zehn Behälter zufällig verteilt.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die beiden roten Kugeln in denselben Behälter gelangen.

(2 Punkte)

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die drei gelben Kugeln in unterschiedliche Behälter gelangen.

(3 Punkte)

Teil 1 – Aufgabe 4 - zum Themenbereich Geometrie

Gegeben sind die Punkte $A(0|0|0)$, $B(3|-6|6)$ und $F(2|-4|4)$ sowie die Gerade

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (k \in \mathbb{R}).$$

a) Die Gerade h verläuft durch die Punkte A und B.
Zeigen Sie, dass sich g und h im Punkt F senkrecht schneiden.

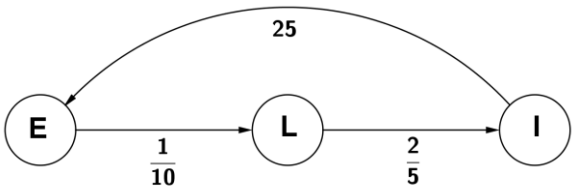
(4 Punkte)

b) Ein Punkt C liegt auf g und ist verschieden von F.
Geben Sie die besondere Bedeutung der Strecke $\overline{CF}$ im Dreieck ABC an.

(1 Punkt)

Teil 1 – Aufgabe 5 - zum Themenbereich Lineare Algebra

Bei der Entwicklung einer Insektenpopulation werden drei Entwicklungsphasen betrachtet: die der Eier (E), die der Larven (L) und die der erwachsenen Insekten (I). Der abgebildete Graph beschreibt modellhaft die Übergänge von Jahr zu Jahr.



a) Eine der Abbildungen beschreibt die zeitliche Entwicklung der Anzahl der erwachsenen Insekten nach dem Modell.

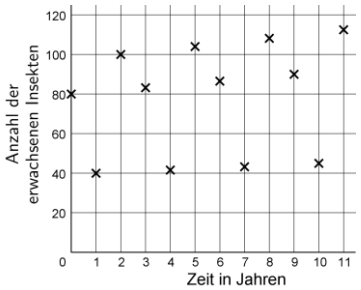


Abbildung A

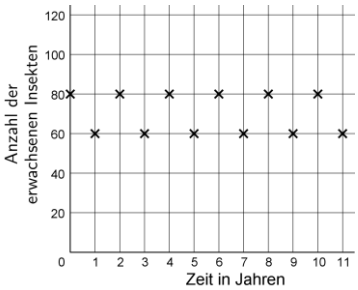


Abbildung B

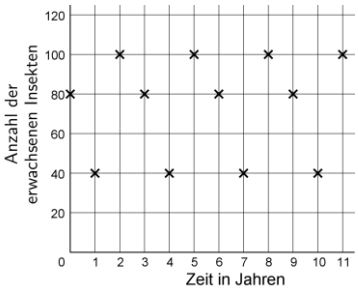


Abbildung C

Geben Sie an, um welche Abbildung es sich handelt.
Begründen Sie Ihre Angabe.

(3 Punkte)

b) Der Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_E \\ x_L \\ x_I \end{pmatrix}$ beschreibt die Zusammensetzung der Population, wobei x_E die Anzahl der Eier, x_L die der Larven und x_I die der erwachsenen Insekten bezeichnet. Die Entwicklung der Population für das jeweilige Folgejahr lässt sich dann durch die Multiplikation $M \cdot \vec{x}$ mit der Übergangsmatrix M beschreiben.

In dem oben angegebenen Übergangsdiagramm soll ein Zahlenwert so angepasst werden, dass eine Insektenpopulation beschrieben wird, bei der sich die Anzahl der erwachsenen Insekten nach jeweils drei Jahren um 20% erhöht.

Geben Sie die Übergangsmatrix M dazu an.

(2 Punkte)

Schulnr.: Kursbezeichnung:

Name:

Schriftliche Abiturprüfung 2018

Leistungskurs Mathematik (GTR)

Mittwoch, 2. Mai 2018

Unterlagen für die Prüfungsteilnehmerinnen und –teilnehmer

– Teil 2: Aufgaben mit Hilfsmitteln –

Allgemeine Arbeitshinweise

- Tragen Sie bitte oben rechts auf diesem Blatt und auf den nachfolgenden Aufgabenblättern die Schulnummer, die schulinterne Kursbezeichnung und Ihren Namen ein.
- Schreiben Sie auf alle Entwurfsblätter (Kladde) und die Reinschrift Ihren Namen.
- Versehen Sie Ihre Reinschrift mit Seitenzahlen.

Fachspezifische Arbeitshinweise

- Die Arbeitszeit beträgt 225 Minuten.
- Erlaubte Hilfsmittel: Grafikfähiger Taschenrechner (GTR), dessen Betriebsfähigkeit die Schülerin / der Schüler gewährleistet, Formelsammlung, Zeichengerät, Rechtschreiblexikon.

Aufgaben

- Sie erhalten drei Aufgaben zur Bearbeitung.
- Überprüfen Sie bitte zu Beginn die Vollständigkeit der vorgelegten Aufgaben (Anzahl der Blätter, Anlagen, …).
- Vermerken Sie in Ihrer Reinschrift, welche Aufgabe Sie jeweils bearbeiten.

Teil 2 – Aufgabe 1 - zum Themenbereich Analysis

GTR

Kugelstoßen

Abbildung 1 zeigt schematisch drei Bahnen, auf denen sich eine Kugel beim Kugelstoßen bewegen kann. Im verwendeten Koordinatensystem entspricht eine Längeneinheit einem Meter in der Realität; die x-Achse beschreibt den horizontal verlaufenden Boden. Die Kugel soll als punktförmig angenommen werden.

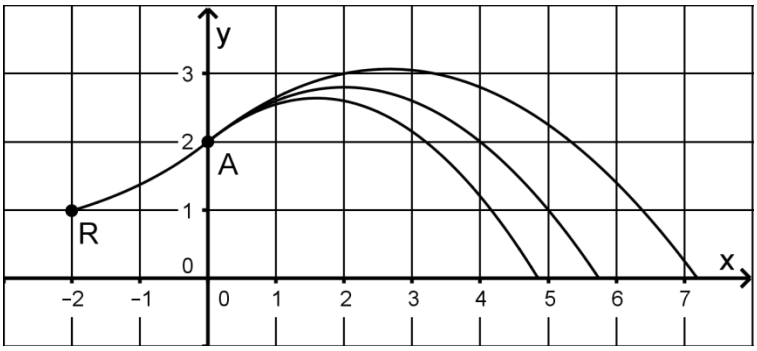


Abb.1

Die Kugel wird aus der Ruhelage (R) beschleunigt, bis sie im Abstoßpunkt (A) die Hand der Athletin verlässt. Die anschließende Flugkurve der Kugel ist abhängig von ihrer Geschwindigkeit beim Abstoßen. Damit verändert sich insbesondere die Stoßweite, d. h. der horizontale Abstand zwischen Abstoßpunkt und Auftreffpunkt auf dem Boden.

a) Zunächst wird die Flugkurve vor dem Abstoßen der Kugel betrachtet. **Berechnen** Sie die Länge der Bahn der Kugel von der Ruhelage bis zum Abstoßpunkt näherungsweise als Länge der Strecke $\overline{RA}$.

Nach dem Abstoßen der Kugel lässt sich jede mögliche Flugkurve mithilfe einer der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen p_a mit $p_a(x) = -ax^2 + 0{,}8x + 2$ und $a \in \mathbb{R}^+$ beschreiben.

Berechnen Sie denjenigen Wert von a, für den der Graph von p_a durch den Punkt $(3 \mid 3{,}5)$ verläuft.

Bei der Flugkurve zu $a = 0{,}1$ beträgt die Stoßweite 10 m. **Berechnen** Sie die Größe des Winkels, unter dem die Kugel auf den Boden auftrifft.

Zeigen Sie rechnerisch, dass $H\left(\frac{0{,}4}{a} \mid 2 + \frac{0{,}16}{a}\right)$ Hochpunkt des Graphen von p_a ist.

Es gibt eine Gerade, auf der die Hochpunkte aller Graphen von p_a liegen. **Berechnen** Sie die Steigung dieser Gerade.

(14 Punkte)

b) Der Zusammenhang zwischen den Werten von a und den Stoßweiten s mit $s > 0$ lässt sich durch die Gleichung $a = \frac{0{,}8}{s} + \frac{2}{s^2}$ darstellen.

Bei einem Stoß beträgt die Stoßweite 20 m. **Berechnen** Sie die größte Höhe der Flugkurve für diesen Stoß.

(Zur Erinnerung: $H\left(\frac{0{,}4}{a} \mid 2 + \frac{0{,}16}{a}\right)$)

Abbildung 2 stellt den Zusammenhang zwischen den Werten von a und den Stoßweiten s graphisch dar.

Beurteilen Sie die folgende Aussage, indem Sie zwei geeignete Punkte auswählen: „*Unterscheiden sich die Weiten zweier Stöße um 2 m, so ist der zur größeren Weite gehörende Wert von a halb so groß wie der zur kleineren Weite gehörende.*“

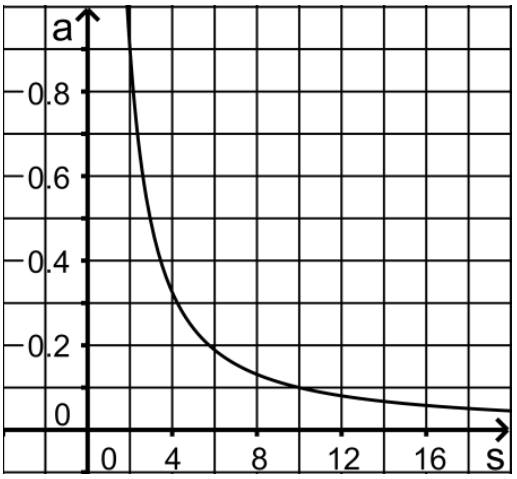


Abb. 2

Zeichnen Sie in Abbildung 2 die beiden Parallelen zur s-Achse **ein**, die durch die Punkte $P_1(2 \mid 0{,}9)$ und $P_2(10 \mid 0{,}1)$ des Graphen verlaufen. **Bestimmen** Sie den Inhalt des Flächenstücks, das der Graph mit der a-Achse und den beiden eingezeichneten Parallelen einschließt.

(14 Punkte)

c) Auf dem Boden eines Behälters liegt eine Kugel. Abbildung 3 zeigt – um 90° gedreht – einen Querschnitt dieses Behälters und der Kugel. Im verwendeten Koordinatensystem entspricht eine Längeneinheit 1 cm, d. h. die Kugel hat einen Durchmesser von 10 cm.

Die Seitenwand des Behälters lässt sich modellhaft durch Rotation des Graphen der Funktion q mit $q(x) = \sqrt{5x + 40}$ und $x \in [0; 13]$ um die x-Achse beschreiben. Der Behälter ist zum großen Teil mit Wasser gefüllt. Die Kugel befindet sich vollständig unterhalb der Wasseroberfläche.

Zeigen Sie, dass sich im Behälter mehr als $1500\,\text{cm}^3$ Wasser befinden.

(5 Punkte)

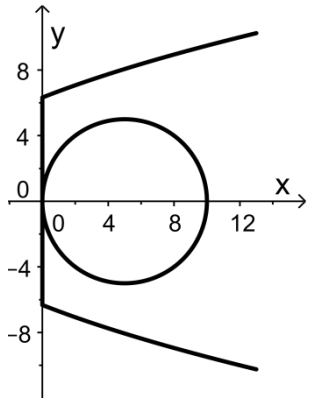


Abb. 3

Teil 2 – Aufgabe 2 - zum Themenbereich Analysis

GTR

Medikamente

Medikamente können unterschiedlich verabreicht werden, zum Beispiel

- über Spritzen,
- über einen Tropf,
- über den Mund.

Durch die Art der Aufnahme wird mitbestimmt, wie das Medikament im Körper zur Verfügung steht. Die Konzentration des Medikamentenwirkstoffs (im Folgenden kurz: Medikamentenkonzentration) im Blutplasma wird in Mikrogramm pro Milliliter [µg/ml] gemessen.

a) Ein Medikament wird über eine Spritze verabreicht.

Damit steht der gesamte Wirkstoff im Körper sofort zur Verfügung. Die Medikamentenkonzentration im Blutplasma beträgt zu Beginn der Messung 5 µg/ml. Pro Stunde werden 9% des Medikaments abgebaut. Die Medikamentenkonzentration im Blutplasma wird durch eine Funktion f mit

$$f(t) = a \cdot e^{k \cdot t} \text{ mit } t \in \mathbb{R} \text{ und } t \geq 0$$

beschrieben. Dabei gibt $f(t)$ die Medikamentenkonzentration in µg/ml und t die Zeit in Stunden [h] seit Verabreichung der Spritze an.

Begründen Sie, dass f mit $f(t) = 5 \cdot e^{-0{,}0943 \cdot t}$ die Medikamentenkonzentration im Blutplasma beschreibt.

Berechnen Sie die Medikamentenkonzentration im Blutplasma zum Zeitpunkt $t = 2$.

Die Zeitspanne, nach der die Medikamentenkonzentration im Blutplasma nur noch die Hälfte des Ausgangswerts hat, heißt „Plasmahalbwertszeit“. **Bestimmen** Sie diese für das verabreichte Medikament.

Zeigen Sie, dass die Funktion f die Bedingung

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = c \text{ für ein } c \in \mathbb{R}$$

erfüllt und **erläutern** Sie diese Gleichung im Sachzusammenhang.

(9 Punkte)

b) Ein anderes Medikament wird durch eine Infusion über einen Tropf verabreicht.

Dem Körper wird durch den Tropf permanent eine konstante Medikamentenmenge zugeführt. Die Medikamentenkonzentration im Blutplasma wird durch eine Funktion g mit der Gleichung

$$g(t) = 8 - 8 \cdot e^{-0{,}8 \cdot t} \text{ mit } t \in \mathbb{R} \text{ und } t \geq 0$$

modelliert. Dabei gibt $g(t)$ wieder die Medikamentenkonzentration in µg/ml und t die Zeit in Stunden seit Anlegen des Tropfes an.

Bestimmen Sie die Medikamentenkonzentration zu Beginn der Verabreichung durch den Tropf ($t = 0$).

Eine der Abbildungen zeigt den Graphen von g. **Begründen** Sie mit zwei Argumenten, welche dies ist.

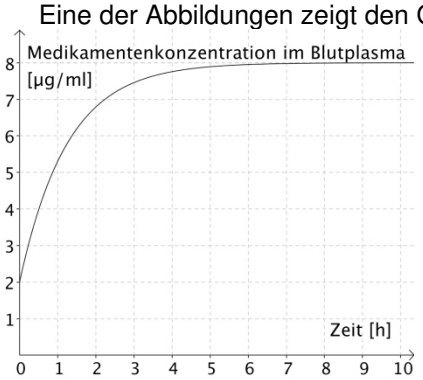


Abbildung A

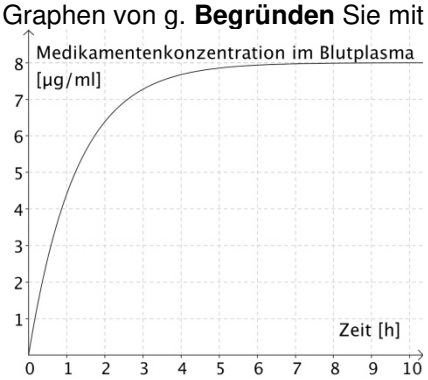


Abbildung B

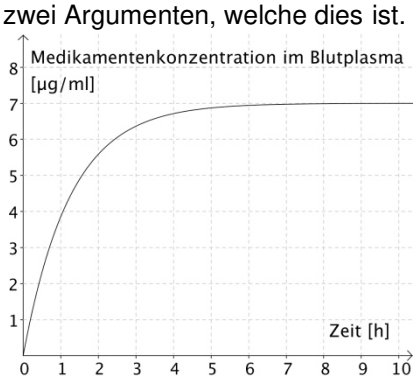


Abbildung C

Die Ableitungsfunktion g' ist monoton fallend. **Zeigen** Sie, dass für den Grenzwert $\lim\limits_{t\to\infty} g'(t)$ gilt:

$$\lim_{t\to\infty} g'(t) = 0 .$$

Interpretieren Sie diesen Grenzprozess in Bezug auf die Medikamentenkonzentration im Blutplasma.

Über den Tropf wird dem Körper kontinuierlich eine konstante Medikamentenmenge zugeführt. Trotzdem gilt für die Ableitung der Funktion, mit der die Medikamentenkonzentration im Körper modelliert wird, die Gleichung $\lim\limits_{t\to\infty} g'(t) = 0$. **Erläutern** Sie, was dieser Grenzwert in Bezug auf die Medikamentenmenge, die im Körper abgebaut wird, bedeutet.

(8 Punkte)

c) Ein Medikament wird über den Mund aufgenommen.
Es wird erst nach und nach im Körper freigesetzt, aber gleichzeitig auch schon abgebaut. In bestimmten Fällen kann die Medikamentenkonzentration im Blut bei diesem Prozess durch eine Funktion $m_{a;k}$ mit der Gleichung

$$m_{a;k}(t) = a \cdot t \cdot e^{-k\cdot t}, \text{ mit } a,k,t \in \mathbb{R} \text{ und } a > 0, k > 0 \text{ und } t \geq 0$$

beschrieben werden. Dabei gibt $m_{a;k}(t)$ wieder die Medikamentenkonzentration in µg/ml und t die Zeit in Stunden seit Einnahme des Medikaments an.

Bestimmen Sie die Stelle t_E des Extrempunkts von $m_{a;k}$ und die Art des Extremums in Abhängigkeit von a und k.

Die y-Koordinate des Extrempunkts lautet $y = \frac{a}{k} \cdot e^{-1}$. **Bestimmen** Sie a und k auf eine Nachkommastelle genau für den Fall, dass der Extrempunkt bei $P(2{,}5 \mid 4{,}14)$ liegt. (Zur Kontrolle: $a \approx 4{,}5$ und $k = 0{,}4$)

Im Koordinatensystem in der Anlage sind der Graph zu m mit $m(t) = 4{,}5 \cdot t \cdot e^{-0{,}4\cdot t}$ und der Graph zu f (Aufgabenteil a)) eingezeichnet, jedoch fehlt die Skalierung der Achsen. **Geben** Sie diese an, indem Sie passende Zahlenwerte an ausgewählten Achsenunterteilungen eintragen.

(12 Punkte)

d) Der Flächeninhalt der Fläche zwischen dem Graphen einer Medikamentenkonzentration und der x-Achse wird AUC (area under the curve) genannt. Zum Beispiel ist bei der Verabreichung über den Mund, also bei der Medikamentenkonzentration, die durch die Funktion $m(t)$ modelliert wird, der AUC_{Mund} definiert durch

$$AUC_{Mund} = \lim_{x\to\infty} \int_0^x m(t)dt \approx 28{,}125 .$$

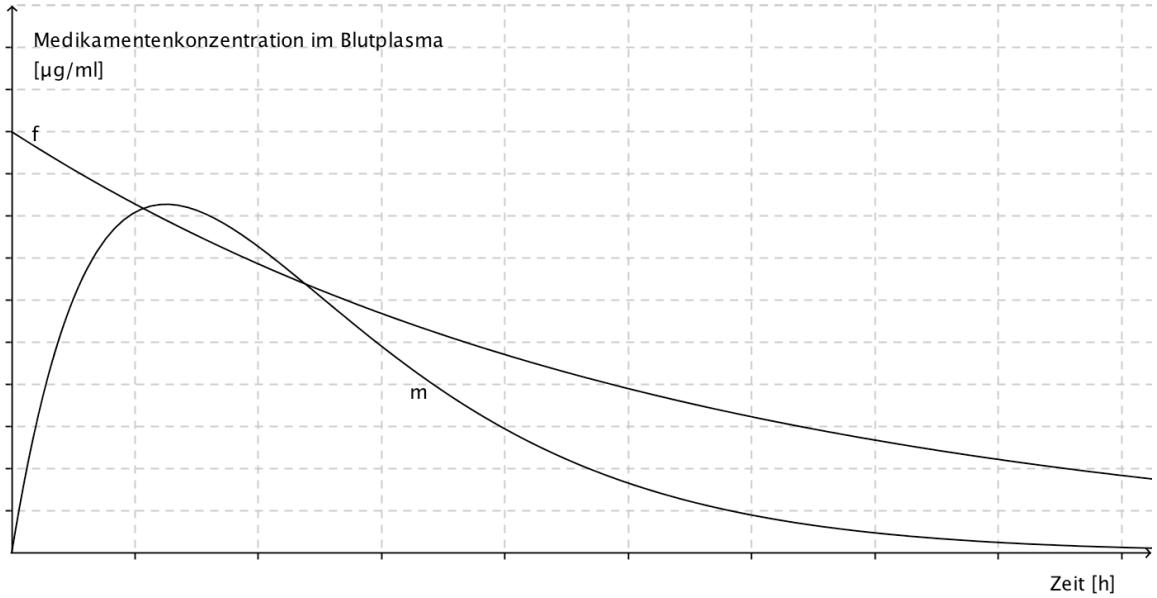
Bestimmen Sie den $AUC_{Spritze}$ für die Verabreichung derselben Wirkstoffmenge über eine Spritze mit Hilfe der Funktion f mit $f(t) = 5 \cdot e^{-0{,}0943\cdot t}$ aus Aufgabenteil a). (Siehe Graph in Anlage 1. Hier ist nur der Bereich 0≤ t ≤18 eingetragen, der Graph verläuft jedoch auch für t>18 noch weiter.)

Mit Hilfe der AUCs wird die Bioverfügbarkeit (BV) des Wirkstoffs eines Medikamentes bestimmt. Eine BV von 1 entspricht 100%. Es gilt für die Bioverfügbarkeit bei Aufnahme über den Mund:

$BV = \frac{AUC_{Mund}}{AUC_{Spritze}}$. **Berechnen** Sie diese Bioverfügbarkeit (Angabe in Prozent).

(4 Punkte)

Anlage 1



Teil 2 – Aufgabe 3 - zum Themenbereich Lineare Algebra

GTR

Taufliegen

Sogenannte Taufliegen leben mehrere Wochen. Eine fertig entwickelte Fliege (im Folgenden als „Vollinsekt" bezeichnet) legt wöchentlich bis zu 400 Eier. Innerhalb der ersten Woche nach dem Legen eines Eis entsteht über mehrere Larvenstadien eine Puppe, innerhalb der zweiten aus dieser Puppe ein Vollinsekt.

Betrachtet wird die Entwicklung verschiedener Populationen weiblicher Tiere, die jeweils unter Laborbedingungen abgeschlossen gezüchtet werden. In einem Modell wird die Zusammensetzung einer Population durch Vektoren der Form $\overrightarrow{v_n} = \begin{pmatrix} E \\ P \\ V \end{pmatrix}$ beschrieben, wobei E die Anzahl der Eier, aus denen weibliche Larven schlüpfen können, P die Anzahl der Puppen und V die Anzahl der Vollinsekten bezeichnet.

Die Entwicklung der Population von einer Woche n zur nächsten kann durch die Matrix

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 200 \\ 0{,}03 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}11 & 0{,}7 \end{pmatrix} \text{ und die Gleichung } \overrightarrow{v_{n+1}} = L * \overrightarrow{v_n}$$

beschrieben werden.

a) **Stellen** Sie die Entwicklung der Fliegenpopulation in einem Übergangsdiagramm **dar**.

Beschreiben Sie die Bedeutung der Matrixeinträge 200 und 0,11 im Sachzusammenhang.

Zu Beginn der Beobachtung einer Fliegenpopulation besteht diese nur aus 230 Vollinsekten.

Zeigen Sie, dass sechs Wochen nach Beobachtungsbeginn etwa 336 Vollinsekten und zehn Wochen nach Beobachtungsbeginn etwa 652 Vollinsekten zur Population gehören.

Bestimmen Sie, wie viele Eier es unter gleichen Modellbedingungen zwei Wochen vor Beobachtungsbeginn gegeben hätte.

Es wird vermutet, dass die Anzahl der Vollinsekten ab dem Zeitpunkt sechs Wochen nach Beobachtungsbeginn innerhalb von jeweils vier Wochen um etwa 92 % zunimmt.

Zeigen Sie, dass diese Vermutung zwischen den Zeitpunkten sechs und zehn Wochen nach Beobachtungsbeginn sowie zwischen den Zeitpunkten zehn und vierzehn Wochen nach Beobachtungsbeginn näherungsweise zutrifft.

Berechnen Sie passend zur Vermutung die durchschnittliche wöchentliche Zunahme der Anzahl der Vollinsekten in Prozent.

Bestimmen Sie, wie viele Wochen nach Beobachtungsbeginn sich die Anzahl der Vollinsekten verzehnfacht hat. Beachten Sie dabei, dass die Population erst nach sechs Wochen stabil wächst.

(17 Punkte)

b) Einer zweiten Population soll am Ende jeder Woche eine bestimmte Anzahl **a** von Vollinsekten entnommen werden. Die Entwicklung dieser Population von einer Woche n zur nächsten kann damit durch die Matrix L und die Gleichung $\overrightarrow{v_{n+1}} = L * \overrightarrow{v_n} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$ beschrieben werden.

Angenommen, die Population bestünde zu Beginn der Beobachtung nur aus 4000 Puppen.

Bestimmen Sie die Zusammensetzung der Population zwei Wochen nach Beobachtungsbeginn, wenn man ihr am Ende jeder Woche 10 Vollinsekten entnimmt.

Beurteilen Sie die folgende Aussage:

Entnimmt man der Population während eines Zeitraums von fünf Wochen am Ende jeder Woche 10 Vollinsekten, so führt dies zur gleichen Zusammensetzung, wie wenn erst nach Ablauf des gesamten Zeitraums 50 Vollinsekten entnommen werden.

Zur Population sollen dauerhaft 20000 Eier und 600 Puppen gehören. **Bestimmen** Sie die Anzahl der Vollinsekten V in der Population und die Anzahl **a** der Vollinsekten, die am Ende jeder Woche entnommen werden müssen.

(8 Punkte)

Die Entwicklung einer dritten Population von einer Woche n zur nächsten kann durch die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 100 \\ 0{,}09 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}15 & 0{,}9 \end{pmatrix} \text{ und die Gleichung } \overrightarrow{v_{n+1}} = M * \overrightarrow{v_n}$$

beschrieben werden.

c) Es gibt Zusammensetzungen dieser Population, die jeweils die drei folgenden Eigenschaften haben:

- Die Anzahl der Eier und die Anzahl der Vollinsekten stehen im Verhältnis **b:1**.
- Die Anzahl der Puppen ist viermal so groß wie die Anzahl der Vollinsekten.
- Die Anzahl der Eier, Puppen und Vollinsekten wächst von einer Woche zur nächsten jeweils mit einem konstanten Faktor **c**.

Bestimmen Sie die Werte von **b** und **c**. Bezeichnen Sie dabei die Anzahl der Vollinsekten mit V.

Zu Forschungszwecken wird bei dieser Population ein Insektizid eingesetzt. Es bewirkt, dass von einer Woche zur nächsten stets alle Vollinsekten sterben, nachdem sie ihre Eier abgelegt haben. Die Überlebenschancen der Eier und Puppen sowie die Fruchtbarkeit der Vollinsekten werden durch das Insektizid aber nicht beeinflusst.

Beurteilen Sie die folgende Aussage:

Betrachtet man die Entwicklung der Population im Rhythmus von drei Wochen, so steigen die Anzahl der Eier, die Anzahl der Puppen und die Anzahl der Vollinsekten jeweils exponentiell an.

(8 Punkte)

Teil 2 – Aufgabe 4 - zum Themenbereich Analytische Geometrie **GTR**

Quader

Die Punkte $A(4|0|0)$, $B(4|4|0)$, $C(0|4|0)$ und $F(4|4|3)$ sind Eckpunkte eines Quaders. Die Gerade h verläuft durch B und F. Eine Abbildung befindet sich im Anhang.

a) **Begründen** Sie, dass das Dreieck ABC rechtwinklig und gleichschenklig ist.

Geben Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks **an**.

Geben Sie eine Gleichung der Geraden g **an**, die durch A und C verläuft.

Begründen Sie, dass die Gerade g windschief zur Gerade h ist.

(6 Punkte)

Die Punkte der Gerade h lassen sich durch $P_t(4|4|t)$ mit $t \in \mathbb{R}$ darstellen. Für jeden Wert von t liegen die Punkte A, C und P_t in der Ebene $E_t: t \cdot x_1 + t \cdot x_2 - 4 \cdot x_3 = 4 \cdot t$.

b) **Zeichnen** Sie für $t = -2$ den Punkt P_t sowie einen Ebenenausschnitt von E_t in die Abbildung ein.

Ermitteln Sie diejenigen Werte von t, für die die zugehörige Ebene E_t mit der x_1x_2-Ebene einen Winkel der Größe 60° einschließt.

(6 Punkte)

Der Quader wird durch die Ebene E_t geschnitten. Je nach Lage der Ebene E_t kann diese Schnittfläche unterschiedliche Formen haben. Eine mögliche Form ist das in der Abbildung dargestellte Viereck mit den Eckpunkten A, C, N und M.

c) **Beschreiben** Sie, welche Form die Schnittfläche von Quader und Ebene besitzt für die Ebene E_t mit $t = 0$.

Es gibt Werte von t, für die die Schnittfläche des Quaders und der Ebene E_t die Form eines Dreiecks hat. **Geben** Sie alle diese Werte von t **an** und **beschreiben** Sie die Lage der Eckpunkte des Dreiecks.

(6 Punkte)

d) In der Abbildung wird der Quader von der Ebene E_t mit $t = 6$ geschnitten. Die Schnittfläche ist dann das Viereck mit den Eckpunkten A, C, N und M, wobei $M(4|2|3)$ und $N(2|4|3)$. Diese Schnittfläche zerteilt den Quader in zwei Teilkörper.

Die Gerade j verläuft durch die Punkte A und M. Die Gerade k verläuft durch die Punkte C und N.

Bestimmen Sie den Schnittpunkt S der Geraden j und k.

Zeigen Sie, dass S auf der Geraden h liegt, sodass die Eckpunkte A, B, C und S eine Pyramide bilden.

Berechnen Sie das Volumen des Teilkörpers mit den Eckpunkten A, B, C, M, F und N.

(12 Punkte)

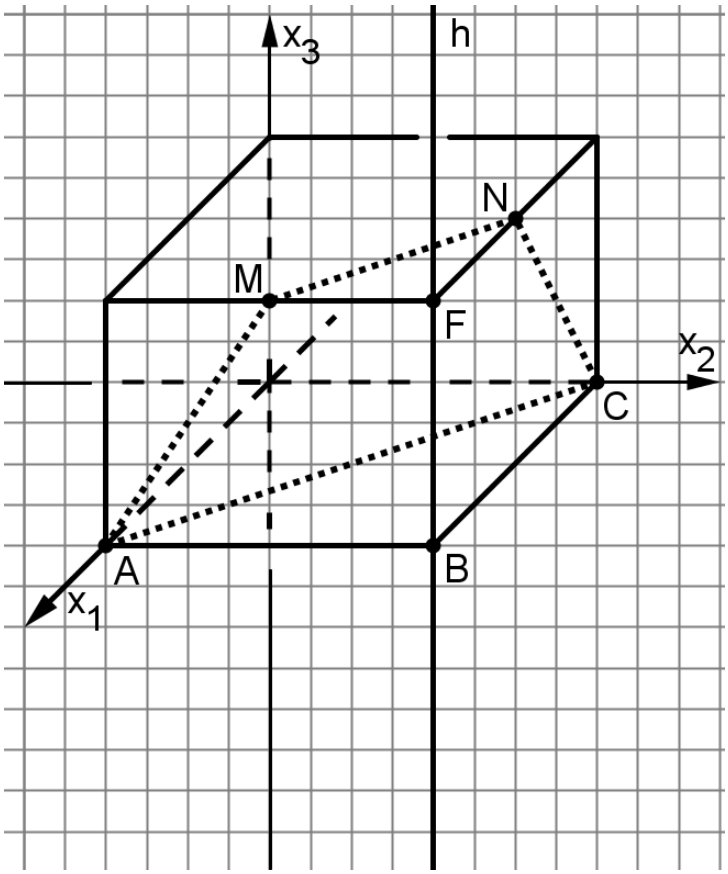
e) Die folgende Aussage stellt die Lösung einer Aufgabe im Zusammenhang mit den bisher betrachteten geometrischen Objekten dar:

$$\left|\frac{t \cdot 4 + t \cdot 4 - 4 \cdot 0 - 4t}{\sqrt{t^2 + t^2 + 16}}\right| = 2 \Leftrightarrow t = -2\sqrt{2} \vee t = 2\sqrt{2}$$

Formulieren Sie eine dazu passende Aufgabenstellung.

(3 Punkte)

Anhang



$A(4|0|0)$,
$B(4|4|0)$,
$C(0|4|0)$,
$F(4|4|3)$,

$P_t(4|4|t)$,

$M(4|2|3)$,
$N(2|4|3)$.

Teil 2 – Aufgabe 5 - zum Themenbereich Stochastik

GTR

Bildschirme

Eine Firma stellt Flachbildschirme her.

Es soll angenommen werden, dass die Anzahl fehlerhafter Geräte unter zufällig ausgewählten Bildschirmen durch eine binomialverteilte Zufallsgröße beschrieben werden kann.

a) Im Mittel ist einer von fünf hergestellten Bildschirmen fehlerhaft.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

A: „Von 25 zufällig ausgewählten Bildschirmen sind genau 3 fehlerhaft."

B: „Von 50 zufällig ausgewählten Bildschirmen sind höchstens 8 fehlerhaft."

C: „Von 200 zufällig ausgewählten Bildschirmen sind mehr als 30 und weniger als 50 fehlerhaft."

Bestimmen Sie die Anzahl fehlerhafter Geräte, die unter 250 zufällig ausgewählten Bildschirmen mit der größten Wahrscheinlichkeit auftritt.

Beurteilen Sie die folgende Aussage:

Wird eine Stichprobe von Bildschirmen um einen zufällig ausgewählten Bildschirm ergänzt, so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass alle Geräte fehlerfrei sind, nach der Ergänzung geringer als vorher.

(9 Punkte)

b) Fehler der Bildschirme treten am häufigsten in Form eines defekten Displays sowie in Form eines defekten Netzteils auf. Für einen zufällig ausgewählten Bildschirm beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

- das Display defekt ist, 10,7 %,
- weder das Display noch das Netzteil defekt ist, 87,3 %,
- das Netzteil defekt ist, 3,0 %.

Stellen Sie den Sachverhalt in einer vollständig ausgefüllten Vierfeldertafel **dar**.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter Bildschirm mit defektem Display auch ein defektes Netzteil besitzt.

Untersuchen Sie, ob die beiden betrachteten Defekte unabhängig voneinander auftreten.

(9 Punkte)

c) Jeder Bildschirm wird vor der Auslieferung abschließend geprüft. Von vierzig abschließend geprüften Bildschirmen, unter denen sechs fehlerhaft sind, werden zehn zufällig ausgewählt.

Beurteilen Sie, ob die Anzahl fehlerhafter Bildschirme unter den ausgewählten binomialverteilt ist.

(2 Punkte)

d) Durch ein verändertes Verfahren bei der Produktion der Bildschirme lassen sich erhebliche Einsparungen erzielen. Die Firmenleitung hofft, dass diese Einsparungen keinen Qualitätsverlust nach sich ziehen. Sie gibt daher vorsichtshalber eine Qualitätskontrolle in Auftrag.

Es wird eine Stichprobe von n=200 Bildschirmen gezogen und ein rechtsseitiger Hypothesentest durchgeführt, um die Nullhypothese H_0: *„Weiterhin sind höchstens 20% der Geräte fehlerhaft."* zu überprüfen.

Beschreiben Sie, welche Fehlentscheidungen bei dieser Qualitätskontrolle auftreten können und was diese für die Firma bedeuten.

Bestimmen Sie eine Entscheidungsregel für den Hypothesentest, wenn die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art maximal 10% betragen soll.

Bei einem zweiten Hypothesentest mit gleichem Stichprobenumfang ergibt sich für den Fehler 2. Art eine Wahrscheinlichkeit von etwa 60%, wenn der Anteil fehlerhafter Geräte tatsächlich bei 26% liegt.

Untersuchen Sie, welche Entscheidungsregel diesem Hypothesentest zugrunde liegt und **bestimmen** Sie die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art. (Beachten Sie die Tabelle im Anhang).

Die Firma hat den Auftrag erhalten, bei einem Großkunden 49 der Bildschirme zu installieren. Es kann weiterhin davon ausgegangen werden, dass im Mittel einer von fünf Bildschirmen fehlerhaft ist.

Bestimmen Sie, wie viele Geräte die Firma vorsichtshalber anliefern sollte, damit die Wahrscheinlichkeit, dass die Lieferung mindestens 49 fehlerfreie Bildschirme enthält, bei mindestens 95% liegt. (Hinweis: Die Laplace-Bedingung für die Standardabweichung $\sigma > 3$ ist gegeben.)

(13 Punkte)

Anhang

B(n,p,k)					
n=200	p=0,20	p=0,26		p=0,20	p=0,26
k	P(X≤k)	P(X≤k)	k	P(X≤k)	P(X≤k)
0	0,0%	0,0%	38	40,2%	1,3%
1	0,0%	0,0%	39	47,2%	2,0%
2	0,0%	0,0%	40	54,2%	2,9%
3	0,0%	0,0%	41	61,1%	4,3%
4	0,0%	0,0%	42	67,6%	6,0%
5	0,0%	0,0%	43	73,5%	8,3%
6	0,0%	0,0%	44	78,9%	11,2%
7	0,0%	0,0%	45	83,5%	14,7%
8	0,0%	0,0%	46	87,4%	18,8%
9	0,0%	0,0%	47	90,6%	23,6%
10	0,0%	0,0%	48	93,1%	28,9%
11	0,0%	0,0%	49	95,1%	34,8%
12	0,0%	0,0%	50	96,6%	40,9%
13	0,0%	0,0%	51	97,6%	47,3%
14	0,0%	0,0%	52	98,4%	53,7%
15	0,0%	0,0%	53	99,0%	60,0%
16	0,0%	0,0%	54	99,3%	66,0%
17	0,0%	0,0%	55	99,6%	71,7%
18	0,0%	0,0%	56	99,7%	76,8%
19	0,0%	0,0%	57	99,9%	81,3%
20	0,0%	0,0%	58	99,9%	85,2%
21	0,0%	0,0%	59	100,0%	88,6%
22	0,1%	0,0%	60	100,0%	91,3%
23	0,1%	0,0%	61	100,0%	93,5%
24	0,2%	0,0%	62	100,0%	95,3%
25	0,4%	0,0%	63	100,0%	96,6%
26	0,6%	0,0%	64	100,0%	97,6%
27	1,1%	0,0%	65	100,0%	98,4%
28	1,8%	0,0%	66	100,0%	98,9%
29	2,8%	0,0%	67	100,0%	99,3%
30	4,3%	0,0%	68	100,0%	99,5%
31	6,3%	0,0%	69	100,0%	99,7%
32	9,0%	0,1%	70	100,0%	99,8%
33	12,4%	0,1%	71	100,0%	99,9%
34	16,6%	0,2%	72	100,0%	99,9%
35	21,5%	0,3%	73	100,0%	100,0%
36	27,2%	0,5%	74	100,0%	100,0%
37	33,5%	0,8%	75	100,0%	100,0%