Nun auch in Bremen !

Mathematik ohne Grenzen richtet sich an Schülerinnen und Schüler der Jahrgangsstufen 10 und 11 beim neunjährigen gymnasialen Bildungsgang bzw. die Jahrgänge 9 und 10 im achtjährigen Bildungsgang**.**

Teamarbeit entscheidet: Mathematik ohne Grenzen ist ein Klassen- bzw. Kurswettbewerb. Nicht die Leistung des Einzelnen führt zum Erfolg, sondern ausschließlich Teamarbeit. Der Wettbewerb will Kinder und Jugendliche weltweit für Mathematik begeistern. Die Teilnahme eröffnet durch fächerübergreifendes Denken einen neuen, spannenden Zugang zu mathematischen Fragestellungen und stärkt den Teamgeist.

Ein Wettbewerb mit internationaler Ausrichtung: Weltweit lösen Schülerinnen und Schüler auf fast allen Kontinenten am selben Tag die gleichen Aufgaben. Um die praktische Anwendung von Fremdsprachen zu unterstützen, ist jeweils eine Aufgabe in Englisch, Französisch, Spanisch und Italienisch formuliert und muss auch in einer dieser Sprachen bearbeitet werden.

Nicht nur mathematisches Talent ist gefragt, auch Organisationsvermögen und Fremdsprachenkenntnisse spielen eine wichtige Rolle. Die Aufgaben können rechnerisch, zeichnerisch, durch Basteln, Denken, Knobeln, oder einfach durch Phantasie gelöst werden. Hierbei sind alle Schülerinnen und Schüler einer Klasse oder eines Kurses gefordert. Jeder bringt dabei seine Fähigkeiten ein.

Zeitplan:

Bis 10. 12. 2011	Anmeldung
November - Januar 2011:	Durchführung des Probewettbewerbs
16. März 2012:	Hauptwettbewerb 2011/12
März 2012:	Korrektur durch regionale Korrekturgruppe
April - Mai 2012:	Regionale Sieger-Ehrung

Weitere Informationen auf der Rückseite und

unter www.mathematikohnegrenzen.de

Ablauf

Von November 2011 bis Januar 2012 besteht die Möglichkeit zur Teilnahme an einem **Probewettbewerb.** Der **Hauptwettbewerb** findet am 16. März 2012 statt.

Probewettbewerb: Die teilnehmende Schule wählt den Termin selbst. Die Aufgaben dazu werden nach der Anmeldung per E-Mail von der regionalen Wettbewerbsleitung verschickt. Die Schülerinnen und Schüler lernen beim Probewettbewerb die Art der Aufgaben kennen und lernen, sich zu organisieren.

Beim Probewettbewerb können Lehrkräfte beim Organisieren helfen. Er/Sie korrigiert die Lösungen und gibt der Klasse und der Wettbewerbsleitung eine Rückmeldung über die erreichten Punktzahlen.

Die Klasse kann auf dem Ergebnis aufbauend Verbesserungsmöglichkeiten diskutieren. Die Wettbewerbsleitung nutzt die Rückmeldung bei der Erstellung der nächsten Aufgaben zur Festlegung des Schwierigkeitsgrades. Dabei werden die Punktzahlen der Klassen anonym gehalten.

Hauptwettbewerb: Die Klassen bzw. Kurse sind nun ganz auf sich gestellt. Sie werden dabei von einer fachfremden Lehrkraft beaufsichtigt. Die Klassen bekommen 10 bzw. 13 Aufgaben und haben 90 Minuten Zeit zum Lösen.

Information und Anmeldung bitte bis zum 10. Dezember 2011 bei Frau Stela Brannath unter s.brannath@schule.bremen.de (Gymnasium an der Hamburger Straße, Tel.: 017632391732). Geben Sie dabei bitte Folgendes an:

- den Namen der Klasse und die Schülerzahl;
- den Namen der zuständigen Lehrkraft und
- deren E-Mail -Adresse

Wir freuen uns auf Ihre Anmeldung!

Mathematik Ohne Grenzen

Probewettbewerb 2011/12

- **Für jede Aufgabe, auch für nicht gelöste, ist ein gesondertes Blatt mit der Bezeichnung von Schule und Klasse abzugeben.**
- **Bei den Aufgaben 1, 5, 9, 10, 11, 12 und 13 müssen die Lösungen begründet werden.**
- **Auch Teillösungen werden berücksichtigt.**
- **Die Sorgfalt der Darstellung wird mitbewertet.**

Mathématiques SANS Frontières

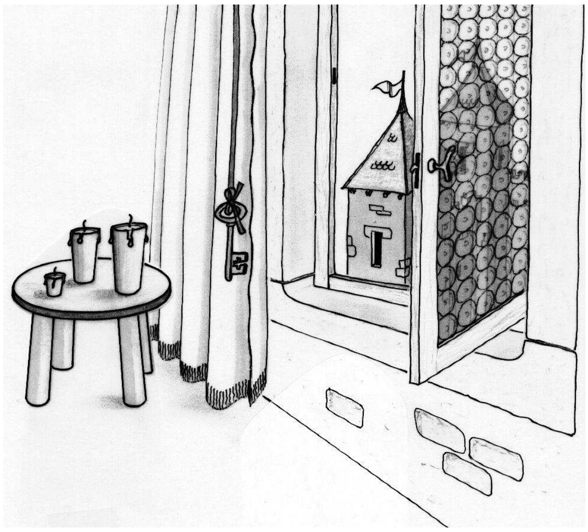
Aufgabe 1 – 7 Punkte — *Zeitzünder*

Die Lösung muss in einer der vier Fremdsprachen formuliert sein und mindestens 30 Wörter umfassen.

Le garde du château doit ouvrir les portes dans exactement 6 heures. Pour mesurer le temps, il dispose de 3 bougies : la grande fond en 4 heures, la moyenne en 3 heures et la petite en 1 heure.

Il n'est pas possible de repérer précisément quand une bougie s'est réduite de moitié, du tiers, du quart ...

Comment le garde doit-il s'y prendre ?



El guardián del castillo tiene que abrir las puertas dentro de 6 horas exactamente. Para medir el tiempo, dispone de 3 velas: la grande se derrite en 4 horas, la mediana en 3 horas y la pequeña en 1 hora.

Es imposible saber cuando una vela se ha derretido por la mitad, la tercera parte, la cuarta parte….

¿Como tiene que proceder el guardián?

The porter of a castle has to open the main gates in exactly 6 hours time. To measure the time passing he has 3 candles: the big one burns itself out in 4 hours, the middle-sized one in 3 hours and the small one in 1 hour.

It is not possible to know precisely when a candle would be half-used or one third used, or a quarter …..

How will he be able to do it?

La guardia del castello deve aprire le porte esattamente tra 6 ore. Per misurare il tempo ha a disposizione 3 candele: la grande si consuma in 4 ore, la media in 3 ore e la piccola in un'ora.

Non è possibile individuare esattamente quando una candela si è ridotta della metà, di un terzo, di un quarto….

Come deve organizzarsi la guardia?

Aufgabe 2 – 5 Punkte — *Spitzwinklig zerlegt*

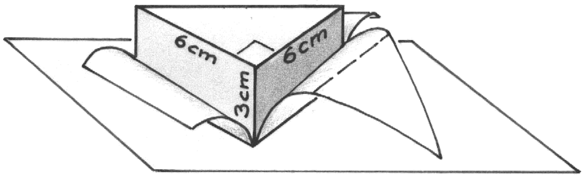
Ein Dreieck ist spitzwinklig, wenn es drei spitze Winkel besitzt.

Martin Gardner (1914-2010), ein Spezialist der Unterhaltungsmathematik, hat bewiesen, dass man ein stumpfwinkliges Dreieck in mehrere Dreiecke zerlegen kann, die alle spitzwinklig sind.

Zeichnet ein stumpfwinkliges Dreieck und seine Zerlegung in spitzwinklige Dreiecke.

Aufgabe 3
7 Punkte

Optimal



Man will ein gerades Prisma der Höhe 3 cm herstellen. Seine Grundfläche ist ein rechtwinkliges gleichschenkliges Dreieck, dessen Katheten 6 cm lang sind.

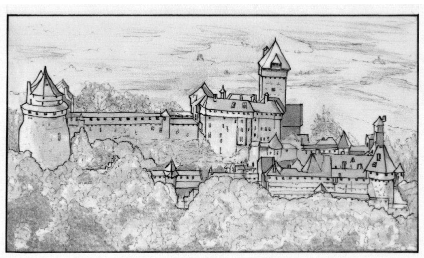
Unter allen Netzen eines solchen Prismas sucht man dasjenige, welches in ein Rechteck mit kleinstmöglichem Flächeninhalt hineinpasst.

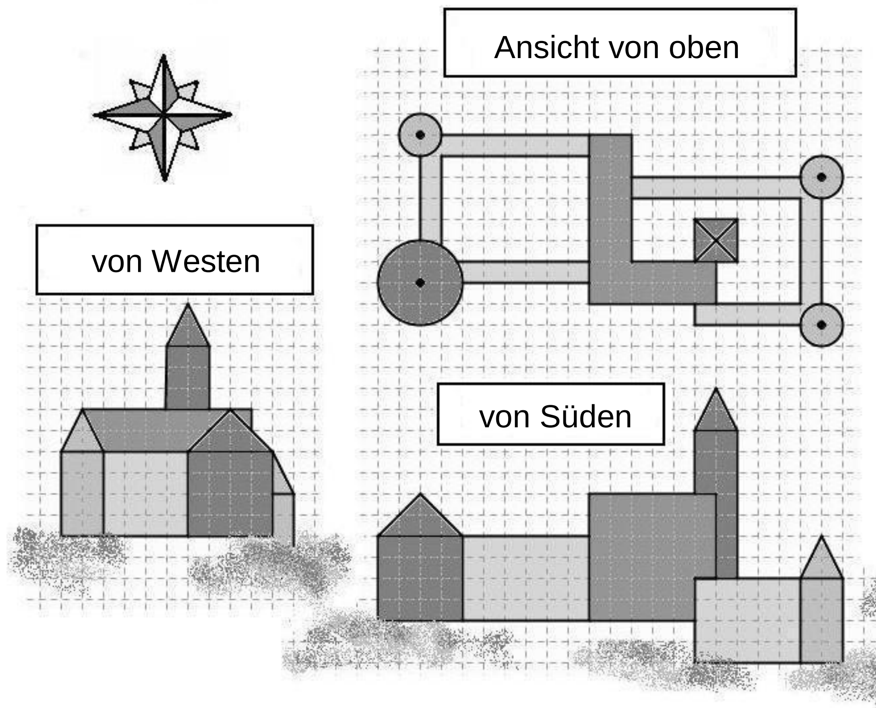
Stellt dieses Netz mit seinem Rechteck auf dem Antwortblatt dar.

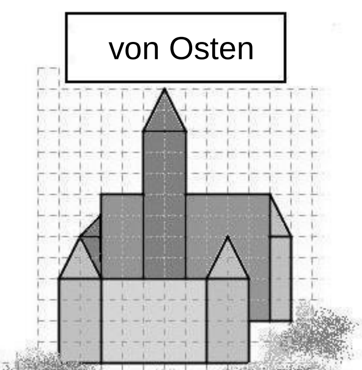
Aufgabe 4
5 Punkte

Hochkönigsburg

Mit Hilfe von Fotos hat Janina vier Ansichten der Hochkönigsburg angefertigt:



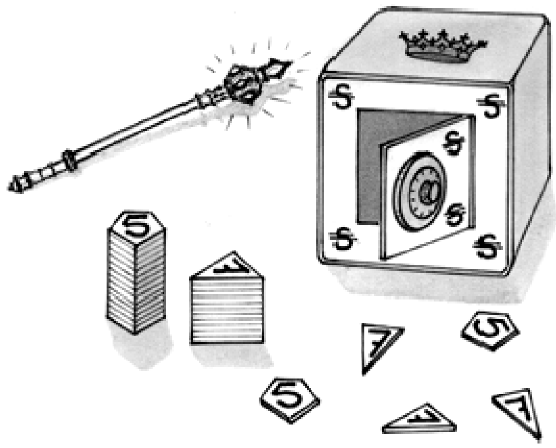




Zeichnet auf kariertem Papier die Ansicht der Hochkönigsburg von Norden.

Aufgabe 5
7 Punkte

Haben Sie's passend ?



In einem fernen Land gab es die Geldwährung Szepter (S̶).

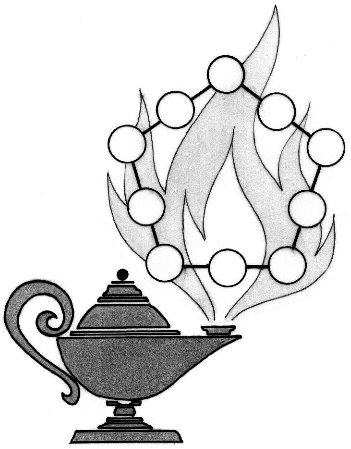
Eines Tages beschloss der König, dass seine Staatsbank nur noch zwei Geldsorten prägen wird: 5 S̶-Münzen und 7 S̶-Münzen.

Beim Bezahlen kleiner Geldsummen gab es allerdings Schwierigkeiten.

So mussten für einen Kaugummi, der 1 S̶ kostete, 3 mal 5 S̶ vorausbezahlt werden um 2 mal 7 S̶ zurückzuerhalten. Aber das Volk gewöhnte sich daran.

Gebt eine Liste aller Beträge unter 30 S̶ an, die man bezahlen kann ohne Geld zurückzuerhalten.

Zeigt, dass alle ganzzahligen Beträge über 30 S̶ bezahlt werden können ohne dass man Geld zurück erhält.



Aufgabe 6 — 5 Punkte

Pentamagisch

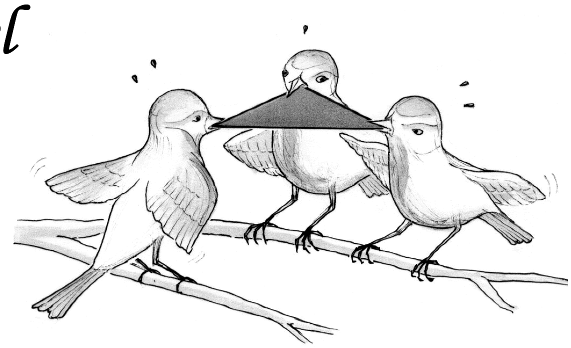
Schreibt die natürlichen Zahlen von 1 bis 10 so in die Kreise des Fünfecks, dass die Summen der Zahlen auf jeder Seite des Fünfecks immer die gleichen sind.

Aufgabe 7 — 7 Punkte

2 Ziffern, 3 Winkel

„Schaut mal dieses gleichschenklige Dreieck an: Alle Maßzahlen seiner Winkel in Grad sind natürliche Zahlen. Außerdem brauche ich nur zwei Ziffern um alle Winkelgrößen aufzuschreiben.“

Gebt die Winkel aller gleichschenkligen Dreiecke mit dieser Eigenschaft an.



Aufgabe 8 — 5 Punkte

Angetreten!

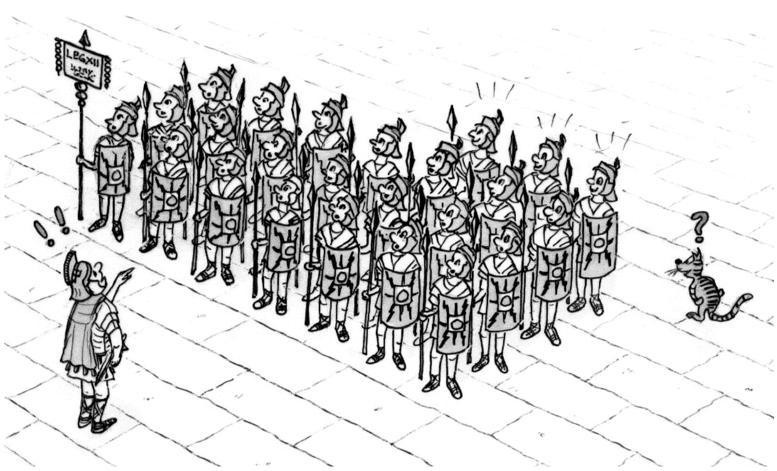
„Antreten in Viererreihen!“ befiehlt der Centurio seinen Männern. Die Legionäre gehorchen, aber die letzte Reihe ist unvollständig: Sie besteht nur aus drei Soldaten.

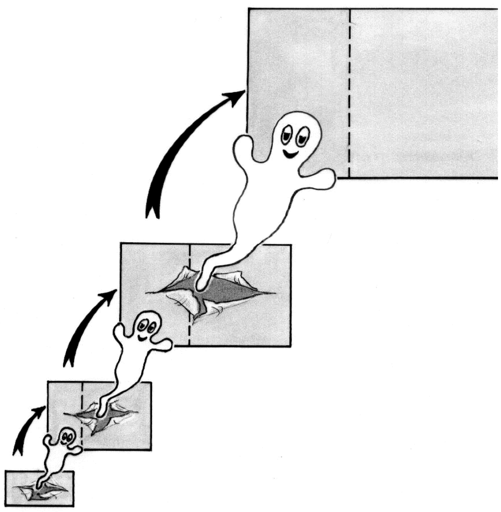
„Antreten in Fünferreihen!“ brüllt der Centurio. Aber wieder stehen in der letzten Reihe nur drei Legionäre.

„Na dann eben antreten in Siebenerreihen!“ Doch erneut bleibt die letzte Reihe unvollständig. Wieder stehen in ihr nur drei Soldaten.

Wie viele Legionäre befehligt der Centurio, wenn man davon ausgeht, dass es weniger als 200 sind?

Schlagt dem Centurio eine Rechtecksformation für die Aufstellung seiner Männer vor, bei der keine Reihe unvollständig bleibt.





Aufgabe 9 — 7 Punkte

Täglich größer

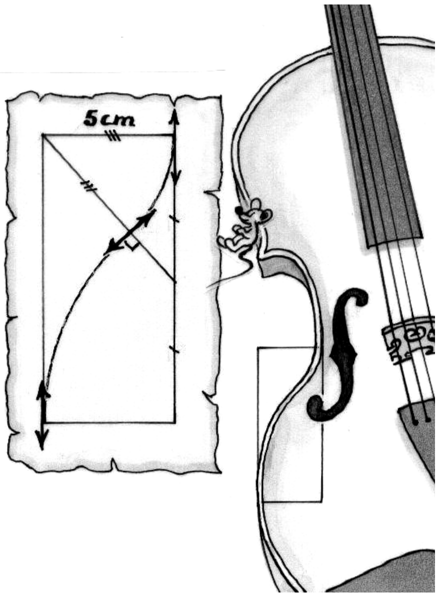
Dies ist die Geschichte eines kleinen Rechtecks mit den Seitenlängen 2 mm und 3 mm. Jeden Tag wird es um ein Stück größer: Seine alte Länge wird zu seiner neuen Breite, seine neue Länge ist die Summe aus alter Länge und alter Breite.

Am Ende von wie vielen Tagen ist sein Flächeninhalt größer als 1,5 m²? Begründet eure Antwort.

Mathématiques SANS Frontières

Aufgabe 10 – 10 Punkte

Es scheint so einfach



Mein Großvater war Geigenbauer. Beim Stöbern in seinen Aufzeichnungen stieß ich auf einen alte vergilbte Skizze, an der bereits die Mäuse genagt hatten. Soweit ich erkennen kann, handelt es sich um eine Kurve aus zwei Kreisbögen, die in einem Rechteck verläuft. Die Pfeile sind tangential zu den Kreisbögen.

Konstruiert das Rechteck unter Berücksichtigung dieser Information und der Markierungen in der Skizze. Zeichnet die Kurve. Begründet die Konstruktion.

Klasse 10

Aufgabe 11 – 5 Punkte

Leas Nummer

Am Ende der Unterrichtseinheit zur Wahrscheinlichkeit ordnet der Lehrer jedem seiner 27 Schülerinnen und Schüler eine unterschiedliche Nummer von 1 bis 27 zu.

„Ich werde jetzt eure Hefte einsammeln – alle oder nur einen Teil, das weiß ich noch nicht. Ich werde mich auf den Zufall verlassen und vertraue die Auswahl meinem Würfel an, den ich jetzt werfe. Ich sammle die Hefte der Schülerinnen und Schüler ein, deren Nummer gleich der geworfenen Augenzahl oder ein Vielfaches davon ist.“

Nach kurzer Rechnung ist Lea klar, dass ihre Chancen 2 zu 3 stehen, dass ihr Heft eingesammelt wird.

Wie könnte die Nummer lauten, die Lea zugwiesen wurde? Gebt alle Möglichkeiten an.

Aufgabe 12 – 7 Punkte

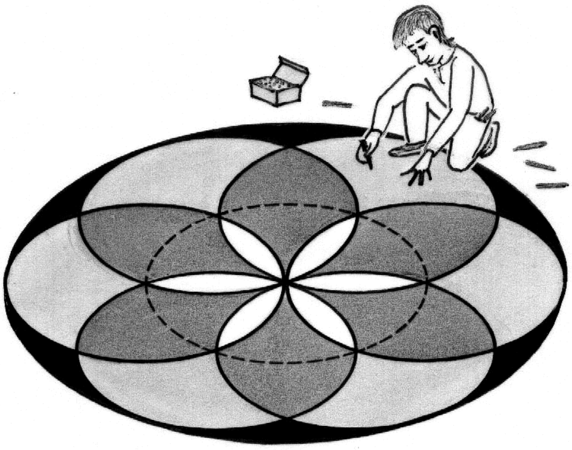
Multimedia

Während einer langen Bahnfahrt vertreiben sich Harold und Maud die Zeit mit ihren MP3-Playern. Während Harold lieber Musik hört, spielt Maud begeistert Videospiele.

Die Akkus beider Geräte sind identisch und anfangs voll geladen. Zum Hören von Musik reicht die Ladung für 12 Stunden, für Videospiele nur vier Stunden.

Harold schlägt vor, die Akkus nach einer gewissen Zeit zu tauschen, damit jeder sein Gerät gleich lang benutzen könne.

Um wie viel Uhr müssen die Akkus getauscht werden, wenn beide Geräte um 9 Uhr eingeschaltet wurden? Begründet.



Aufgabe 13 – 10 Punkte

Mandala

Etienne hat ein Mandala gezeichnet. Es besteht aus sechs Kreisen, deren Mittelpunkte Ecken eines regelmäßigen Sechsecks sind. Ein siebter Kreis berührt alle sechs Kreise von aussen. Etienne hat sein Mandala mit vier Farben ausgemalt, so wie es in der Abbildung zu sehen ist.

Zeichnet das Mandala und malt es entsprechend der Abbildung mit vier Farben aus.

Vergleicht die Flächeninhalte der vier gefärbten Bereiche und begründet diesen Vergleich.

Lösungshinweise für den Probewettbewerb 2011/12

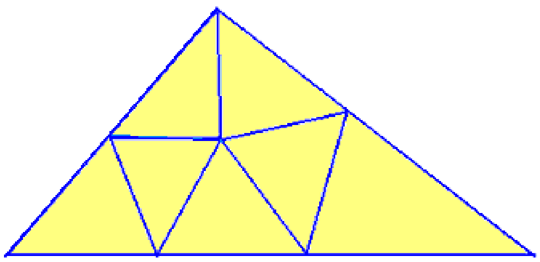
Aufgabe 1 :

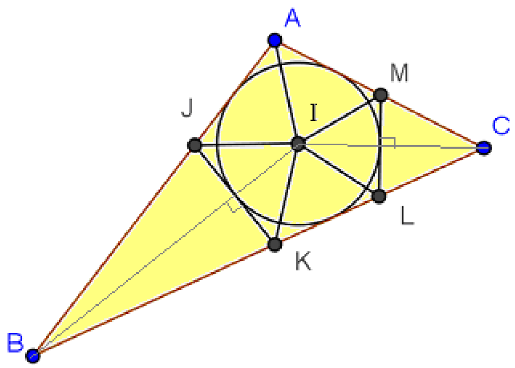
4 + (3 – 1) = 6.

Der Burgwächter zündet sofort alle drei Kerzen an. Eine Stunde später erlischt die kleine Kerze. Er löscht die mittlere Kerze, bei der noch für 2 Stunden Wachs übrigbleibt. Wenn die große Kerze nach 4 Stunden Brenndauer erlischt, zündet er erneut die mittlere Kerze an. Wenn diese Kerze 2 Stunden später abgebrannt ist, öffnet er die Tore der Burg.

Aufgabe 2 :

Links ein Dreieck mit einem stumpfen Winkel, das in 7 Dreiecke mit nur spitzen Winkeln zerlegt wurde :

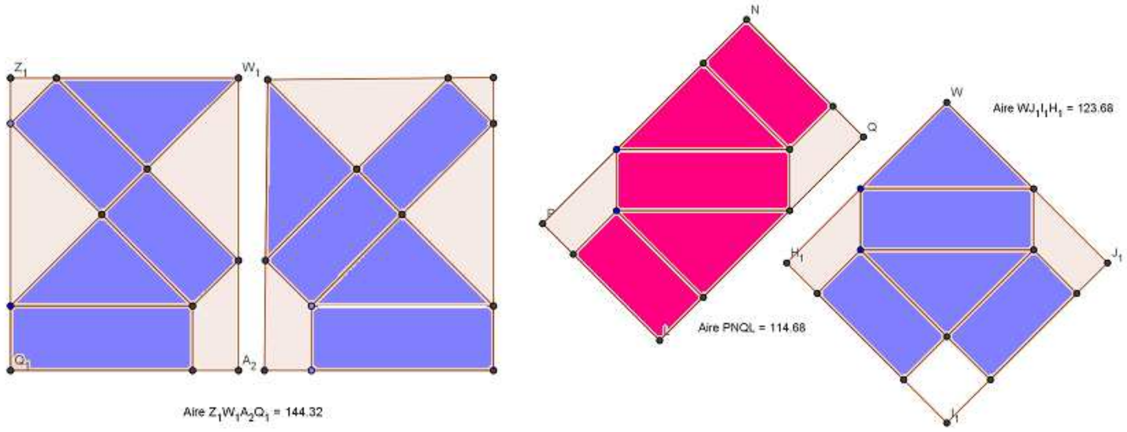




Die rechte Konstruktion mit Tangenten an den Inkreis des Dreiecks ABC zeigt, dass eine solche Unterteilung immer möglich ist (nicht verlangter Beweis).

Aufgabe 3 :

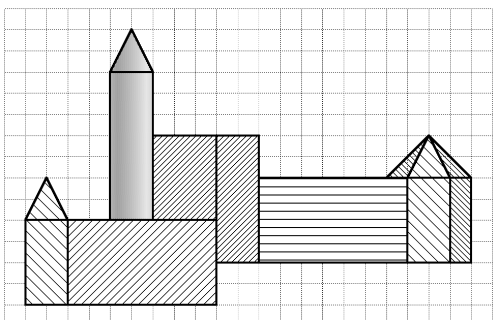
Hier einige Beispiele von Netzen des Prismas mit einbeschriebenem Rechteck :



Das optimale Netz ist das dritte von links. Um die Flächeninhalte zu vergleichen, muss man diese nicht berechnen, es reicht den „Verschnitt“ zu vergleichen.

Aufgabe 4 :

Ansicht von Norden:



Aufgabe 5:

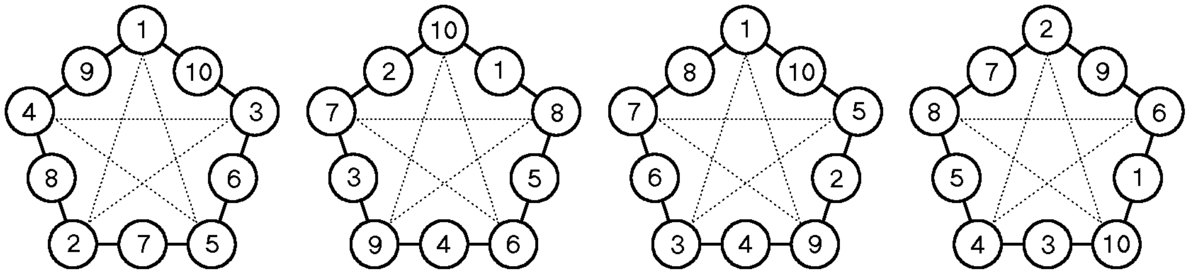
Hier die Liste mit den Beträgen unter 30 S, die man passend bezahlen kann:

Betrag	**5**	**7**	**10**	**12**	**14**	**15**	**17**	**19**	**20**
Bezahlung	5	7	5+5	5+7	2×7	3×5	10+7	12+7	4×5
Betrag	**21**	**22**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
Bezahlung	3×7	17+5	19+5	5×5	19+7	22+5	4×7	22+7	6×5

Von 26 S bis 30 S, hat man fünf aufeinanderfolgende Beträge, die man passend bezahlen kann. Addiert man zu diesen fünf Beträgen jeweils 5 S oder ein Vielfaches davon, lassen sich alle Beträge über 30 S erzeugen.

Aufgabe 6:

Hier vier Lösungen, jede hat noch 10 Varianten aufgrund von Rotation oder Symmetrie.



Nur eine Lösung wird verlangt.

Aufgabe 7:

Es gibt 5 Lösungen: 48+48+84; 60+60+60; 81+81+18; 86+86+8 und 88+88+4.

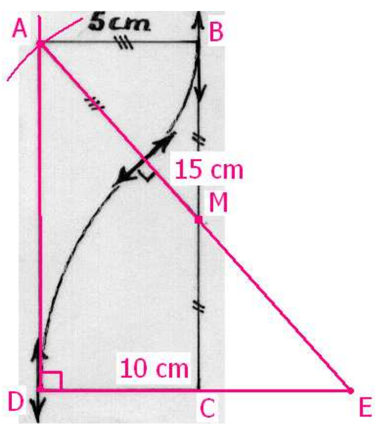
Aufgabe 8:

Sei n die Anzahl der Legionäre. Da bei jeder genannten Aufstellung 3 Soldaten übrig bleiben, muss n-3 durch 4, 5 und 7 teilbar sein. Das Produkt der drei Zahlen ist die kleinste Zahl mit dieser Eigenschaft. Also ist $4 \cdot 5 \cdot 7 + 3 = 143$ die kleinstmögliche Anzahl der Soldaten.
Mit $143 = 11 \cdot 13$ sind zwei Rechtecksformationen möglich.

Aufgabe 9:

Die Abmessungen sind eine Folge von Fibonacci-Zahlen: 2×3 ; 3×5 ; 5×8 usw.
Am Ende des 13. Tages hat das Rechteck die Breite 987 mm und die Länge 1597 mm. Sein Flächeninhalt übertrifft erstmals $1{,}5 \cdot 10^6$ mm² = 1,5 m².
(Als Antwort ist auch der Beginn des 14. Tages richtig.)

Aufgabe 10:

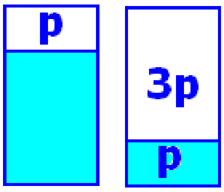


Die Kurve, die von B nach D verläuft, besteht aus zwei Kreisbögen. Am Verlauf der Tangenten und an den Streckenmarkierungen erkennt man, dass der Radius des kleinen Kreisbogens 5 cm beträgt und sein Mittelpunkt A ist. Der Mittelpunkt des großen Kreisbogens liegt auf der Verlängerung der Seite DC. Den Streckenmarkierungen auf der Seite BC entnimmt man, dass M der Mittelpunkt von BC ist. Aus den Strahlensätzen (oder aus der Punktsymmetrie) folgt, dass AB und CE gleich lang sind. Also ist DE, und damit auch der Radius des großen Kreisbogens, 10 cm lang. Für die Strecke AE ergibt sich aus der Summe der beiden Radien eine Länge von 15 cm.
Mit diesen Angaben konstruiert man das Dreieck ADE, dann das Rechteck ABCD und schließlich die beiden Kreisbögen.

Aufgabe 11:

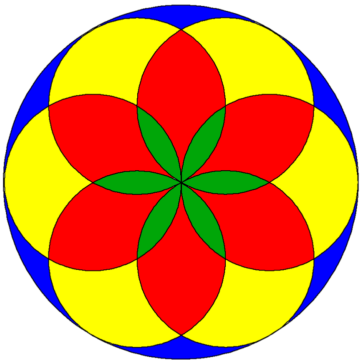
Wenn Leas Chancen 2:3 stehen, wird bei vier der sechs Augenzahlen ihr Heft eingesammelt. Leas Nummer muss also vier dieser Augenzahlen als Teiler besitzen. Durch Nachprüfen stellt man fest, dass von den 27 Nummern nur drei diese Eigenschaft besitzen, nämlich 6, 18 und 20.

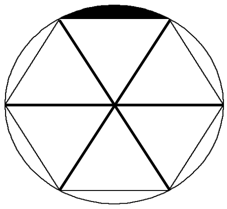
Aufgabe12:



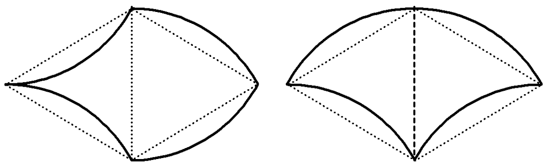
Sei ***p*** der Anteil der Ladung, den Harold verbraucht hat. In der gleichen Zeit verbraucht Maud den Anteil ***3p***.
Sie werden Ihre Akkus tauschen, wenn ***p = 100% – 3p*** gilt.
Daraus folgt ***p = 25%***. Wenn beide Geräte durchgehend eingeschaltet bleiben, müssen Harold und Maud ihre Akkus nach drei Stunden, um 12 Uhr, tauschen.
Beide Geräte können dann sechs Stunden lang betrieben werden.

Aufgabe 13:

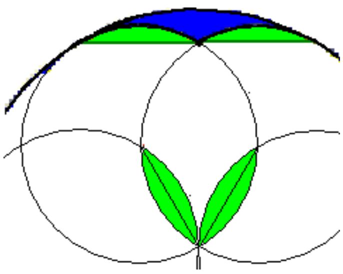




Die Gebiete der jeweiligen Farben bestehen alle aus sechs kongruenten Teilflächen. Es genügt also, diese Teilflächen zu vergleichen. Außerdem lässt die Figur ein Grundgerüst aus gleichseitigen Dreiecken erkennen, deren Seitenlänge r mit den Radien der sechs inneren Kreise und deren Abstand zu den benachbarten Mittelpunkten übereinstimmt.
Die inneren grünen Blütenblätter bestehen aus zwei kongruenten Kreisabschnitten. Diese tauchen auch in den anderen Teilflächen auf.



Betrachtet man z.B. eine rote und eine gelbe Teilfläche, so stellt man fest, dass man diese durch wegnehmen und hinzufügen zweier Kreisabschnitte aus zwei Dreiecken des Grundgerüsts erzeugen kann. Die rote und die gelbe Teilfigur (und damit auch die rote und die gelbe Gesamtfläche) stimmen also in ihrem Flächeninhalt überein.



Der Radius des äußeren Kreises ist doppelt so groß wie der Radius der kleinen Kreise. Der Flächeninhalt des abgebildeten Kreisabschnitts (eine blaue und zwei grüne Flächen) ist also viermal so groß, wie der Inhalt eines grünen Kreisabschnitts. Die blaue Teilfläche ist demnach so groß wie die beiden grünen, die zusammen eines der sechs inneren Blütenblätter bilden.
Der Gesamtinhalt der blauen und grünen Teilflächen ist damit ebenfalls gleich, aber kleiner als der Gesamtinhalt der roten und gelben Teilflächen.

Der Vergleich kann auch rechnerisch durchgeführt werden (allgemein oder an einem konkreten Beispiel).

Mathematik ohne Grenzen 2011/2012
Bewertungsvorschläge zum Probewettbewerb

Aufgabe 1 (7 Punkte): *Zeitzünder*

Sprachliche Darstellung **3 Punkte**, richtige Argumentation **4 Punkte.**

Aufgabe 2 (5 Punkte): *Spitzwinklig zerlegt*

5 Punkte bei vollständig richtiger Lösung, wobei die Stumpfwinkligkeit des Ausgangsdreiecks und die Spitzwinkligkeit der Teildreiecke klar erkennbar sein müssen. Ein Beweis für die Zerlegbarkeit beliebiger stumpfwinkliger Dreiecke wird nicht erwartet.

Aufgabe 3 (7 Punkte): *Optimal*

7 Punkte für die Darstellung des optimalen Netzes, eingebettet in ein Rechteck, **4 Punkte** für die Einbettung des Netzes in ein Quadrat (vgl. Lösungsvorschläge). **2 Punkte** für jede andere Darstellung eines zusammenhängenden Netzes in einem Rechteck.

Aufgabe 4 (5 Punkte): *Hochkönigsburg*

5 Punkte für die richtige Lösung, **3 Punkte** falls die Zeichnung seitenverkehrt ist, **bis zu 3 Punkten Abzug** bei Ungenauigkeiten von Details.

Aufgabe 5 (7 Punkte): *Haben Sie's passend?*

4 Punkte für die Liste der Beträge, **3 Punkte** für die Begründung, dass alle ganzzahligen Beträge über 30 S passend bezahlt werden können. An einen Nachweis, dass die übrigen Beträge nicht passend bezahlt werden können, ist nicht gedacht, auch nicht daran, wie das Begleichen der übrigen Beträge sonst bewerkstelligt werden kann. Entsprechende Vorschläge können aber in der Bewertung dennoch berücksichtigt werden.

Aufgabe 6 (5 Punkte): *Pentamagisch*

5 Punkte für die Angabe **einer** richtigen Lösung (ohne weiteren Nachweis).

Aufgabe 7 (7 Punkte): *2 Ziffern, 3 Winkel*

7 Punkte für alle fünf Lösungen, **6 Punkte** falls das gleichseitige Dreieck fehlt, **5 Punkte** bei 4 Dreiecken, von denen eines gleichseitig ist, **4 Punkte** bei 3 Dreiecken, die nicht gleichseitig sind, **3 Punkte** bei 2 Dreiecken, **2 Punkte** falls nur ein nichtgleichseitiges Dreieck genannt wird, **1 Punkt** falls nur das gleichseitige Dreieck genannt wird.

Aufgabe 8 (5 Punkte): *Angetreten!*

4 Punkte für die richtige Anzahl (143) und **1 Punkt** für die Angabe einer Formation. Eine Begründung wird nicht verlangt.

Aufgabe 9 (7 Punkte): *Täglich größer*

4 Punkte für die richtige Antwort, **3 Punkte** für den Nachweis (z.B. in Form einer Tabelle).

Aufgabe 10 (10 Punkte): *Es scheint so einfach*

6 Punkte für die exakte Zeichnung des Rechtecks und der Kreisbögen (Toleranz 1 mm), **4 Punkte** für die Begründung der Konstruktion. Die Länge des Rechtecks kann auch durch Rechnung bestimmt werden.

Aufgabe 11 (5 Punkte): *Leas Nummer*

5 Punkte für die vollständige Antwort (6, 18 und 20) mit Erklärung. Falls unvollständig: **1 Punkt** pro richtige Antwort und maximal zwei Punkte je nach Qualität der Erklärung.

Aufgabe 12 (7 Punkte): *Multimedia*

3 Punkte für die richtige Antwort. **4 Punkte** für die Begründung. Punktabzug bei falscher oder unvollständiger Begründung im Ermessen des Korrektors.

Aufgabe 13 (10 Punkte): *Mandala*

1 Punkt für die ausgemalte Zeichnung. Jeweils **4 Punkte** für den Nachweis, dass jeweils zwei Farben gleich große Flächen belegen. **1 Punkt** für den Größenvergleich der beiden Farbenpaare.

Bemerkung:

Die vorgeschlagenen Punkteverteilungen sollen nur als Vorschlag dienen. Sie können individuell, je nach pädagogischem Ermessen oder den mathematischen Lehrplänen der verschiedenen Länder, verändert werden.

Sie können natürlich auch den Lösungen der Schüler, die manchmal überraschend und unerwartet sind, angepasst werden.

Das Aufgabenteam von Mathematik ohne Grenzen.